有限要素法による床板の弾塑性解析

京都大学工学部　正員　小西一郎
横河橋梁製作所　正員　○栗本英規

1. 要旨

この研究は長方形鋼製床板の弾塑性問題を解析するために有限要素法(*Finite Element Method*)を用いて数値解析を行ったものである。

2. 有限要素法

有限要素法はまだ開発途上の構造物の数値解析法であるが，その有効性は多くの研究によって実証されている。その考え方，解法は最近いくつかの解説，論文が日本でも発表されたのでそれらを参照されたい。[1]

ここでは要素(*Element*)としては長方形要素を用いた。この長方形要素の *Stiffness Matrix* としては O.C. Zienkiewicz と Yau Kai Cheung[2] によって導かれたものを用いた。この *Stiffness Matrix* はたわみ w を次の形に仮定することによって導かれる。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x y^3 \quad (1)$$

α：未定係数

3. 塑性条件を求めるための仮定

a) 板のたわみは板厚に比べて小さく，たわみ w は式(1)の形で表わし得るものとする。

b) 応力－ひずみ曲線はバイリニアーとし，ポアソン比 ν は不変とする。

c) 塑性条件は von Mieses の式を用いる。そして一つの要素全体が平均的に塑性条件式を満足したとき，その要素全体または一部が塑性域に入ったとし，ヤング係数 E を変化させ，ひずみ硬化時のヤング係数 E' を用いる。

4. 断面力

節点 i の変位を u_i
要素 A の節点の変位を U^A とすれば

$$u_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}, \quad U^A = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_l \end{bmatrix} = C\alpha \quad (2)$$

要素 A 内の任意点の曲率とねじれ率は

$$\chi^A = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = B\alpha = BC^{-1}U^A \quad (3)$$

よって要素内の任意点の断面力は

$$M^A = D\chi^A = DBC^{-1}U^A \quad (4)$$

ここで

$$M^A = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

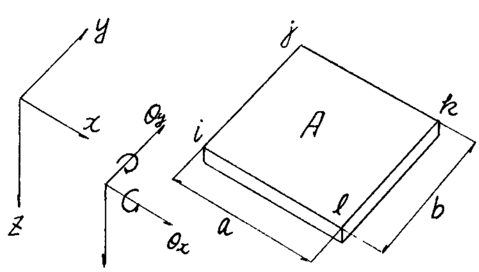

図-1

要素Aの Stiffness Matrix K^Aは

$$K^A=(C^{-1})^T\{\iint B^T DB\,dxdy\}C^{-1} \quad \text{積分は要素}A\text{全体} \quad (5)$$

次に要素Aの平均断面力$\bar{M}^A$を定義する。

$$M^A=\frac{1}{ab}\left[\iint(DBC^{-1})dxdy\right]U^A=\frac{1}{ab}E^AU^A \quad \text{積分は要素}A\text{全体} \quad (6)$$

5. 塑性条件

要素内の塑性域の板厚方向への発達を無視して次の条件を満足したときその要素全体が塑性域に入ったものとみなす。（塑性条件A）　h：板厚　σ_0：降伏応力

$$\bar{M}_x^2-\bar{M}_x\bar{M}_y+\bar{M}_y^2+3\bar{M}_{xy}^2=M_0^2 \quad \text{ただし} \ M_0=1/4\,\sigma_0 h^2 \quad (7)$$

次に要素内の塑性域の板厚方向への発達を考慮に入れて以下に書く条件を満足したとき要素の一部が塑性域に入ったものとみなす。（塑性条件B）ただし，要素の中立面方向への塑性域の発達は一様であると仮定する。この場合，図-2のように$\xi\cdot h$の部分が塑性域に入っているものとすると，要素の平均断面力とηの間には次の関係がある。

$$4(\varepsilon-1)\eta^3-\left\{3(\varepsilon-1)+\frac{12}{\sigma_0 h^2}\bar{S}\right\}\eta+\varepsilon=0 \quad (8)$$

$$\bar{S}=\sqrt{\bar{M}_x^2-\bar{M}_x\bar{M}_y+\bar{M}_y^2+3\bar{M}_{xy}^2}\ , \quad \eta=1/2(1-2\xi)\ , \quad \varepsilon=E'/E$$

またこの場合の板剛度D'は

$$D'=(8\eta^3-8\varepsilon\eta^2+\varepsilon)D^*\ , \quad D^*=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9)$$

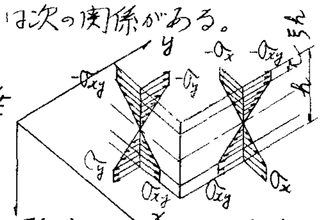

図-2

6. 数値計算

数値計算は厚さ$h=1^{cm}$，辺長$L=100^{cm}$の正方形板をモデルとして，周辺単純支持で中央点に集中荷重が載った場合と，周辺固定で等分布満載荷重を受ける場合について，それぞれ分割数8×8と12×12について行った。また，$\sigma_0=2800\,kg/cm^2$，$\varepsilon=1/500$とした。

解析方法としては漸増荷重法を用い，塑性条件Aと塑性条件Bの場合について行った。

釣合の多元連立一次方程式を解く方法としてはイテレイションを用い，Gauss-Seidal の方法を少し変形して用いった。また(8)式の三次方程式は Newton の方法を用いた。

計算プログラムは主として次の三つの部分の繰返しになる。

1. 各要素の Stiffness を重ね合せて板全体の Stiffness を求める。
2. その荷重ステップでの変位を求めるために，各節点での力の釣合式を解く。
3. 各要素の断面力を求め，塑性条件式より各要素の Stiffness を求める。

（計算結果は当日図で示す）

7. おわりに

長方形板の弾塑性問題についての実験は行なわれていないので，ここで得られた結果の精度は評価できないが，この問題を取り扱う一つの方法としては有効性があると思う。

この方法はリブを有する鋼床板などにも応用し得るであろう。　以上

1) たとえば　梶田，成岡：Finite Element Method について，土木学会誌 5, (1967)

2) O.C. Zienkiewicz et al.：Stress Analysis, J. Wily, New York, 1965