

鉛直等分布荷重を受ける円弧アーチの横倒れ座屈に関する研究

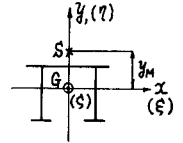
大阪大学 正員 波田凱夫

学生員 ○崎元達郎

1. 諸言 先に、筆者の一人は、kirchhoff-Clebschの式を利用して、一般の曲線材の変形に関する基礎式を發表し、種々の解析を試みてきたが⁽¹⁾⁽²⁾、本研究は、先の基礎式を用いて、鉛直等分布荷重を満載する円弧アーチの横倒れ座屈を、解析したものである。

2. 解析上の仮定と約束 a) アーチは、軸方向に一定な断面を有する単一アーチとし、断面は、弾性主軸系に関して一軸対称とする。

従って(図-1)に示すように、断面図心Gと剪断中心Sとは一致せず、 y_N だけ離れている。 b) アーチは、断面の図心を連れた軸線が、変形前

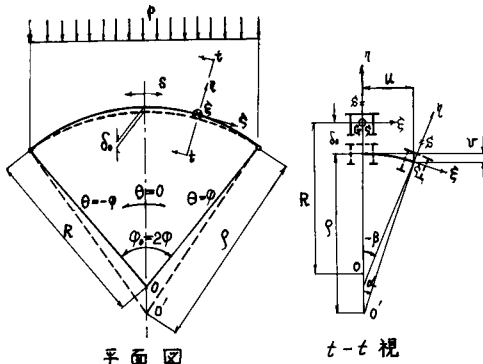


には、曲率半径R、中心角 $\phi_0 (=2\theta)$ なる円弧をなしているとする。

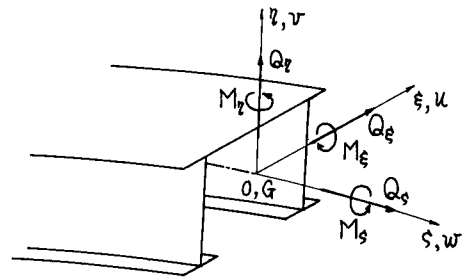
面外座屈への過程は、アーチ面内での変形が、まず独立に先行して起り、(図-1)

アーチ軸線が、曲率半径 ρ なる円弧をなした後に、面外変形を生ずるものとする。

c) 満載鉛直等分布荷重による任意断面での断面力(後に求める軸力 Q_s と面内曲げモーメント M_s)は、変形の前後も通じて変化しないものとする。



(図-2)



(図-3)

3. 変形の基本式 直交座標軸 (ξ, η, s) 変位 (u, v, w) 、撓み角 α 、捩れ角 β 、断面力 $(Q_s, Q_\eta, Q_\xi, M_s, M_\eta, M_\xi)$ を(図-2)(図-3)のように取り、変形後の単位長のアーチリブに作用する外力成分 $(\delta_\xi, \delta_\eta, \delta_s, m_\xi, m_\eta, m_s)$ の正方向を、内力のそれと一致させる。変形の基本式は、次のように与えられる。(諸導の詳細については、文献⁽²⁾を参照されたい。)

面内変形の基本式

$$\{EJ_x((k_0 w)' - v'')\}'' - EFK_0(w' - vk_0) = -(m_s' + \delta_\eta) \left\{ 1 + \frac{v''}{k_0} - (k_0 w)' \frac{v''}{k_0} \right\} \quad (1)$$

$$\{EF(w' + vk_0)\}' + k_0 \{EJ_x((k_0 w)' - v'')\}' = -(m_s k_0 + \delta_s) \left\{ 1 + \frac{v''}{k_0} - (k_0 w)' \frac{v''}{k_0} \right\} \quad (2)$$

(1)「軸力と等分布荷重を受ける曲線材の座屈について」 安宅、波田、林 20周年次講演会概要

(2)「Die grundlegende statische Analyse des gekrümmten Stabes」 Tech. Reports of the Osaka Univ. Vol. 16, No. 7/4 Yoshio Namita.

面外変形の基本式

$$\{EJ_y\{u''-(y_H\beta)''-\beta k_s\}\}' - \{k_s\{\bar{G}I(\beta'+u'k_s)-EC_w(\beta'+u'k_s)''+Q_s y_H\}\}' + \{M_s(\beta'+u'k_s)'\}' + M_s(\beta'+u'k_s) - Q_s\{u''-(y_H\beta)''-\beta k_s\} = \rho_s - m_s(\beta'+u'k_s) - m_p' \quad (3)$$

$$\{\bar{G}I(\beta'+u'k_s)-EC_w(\beta'+u'k_s)''+Q_s y_H\}' - M_s\{u''-(y_H\beta)''-\beta k_s\} + k_s EJ_y\{u''-(y_H\beta)''-\beta k_s\} = -m_s \quad (4)$$

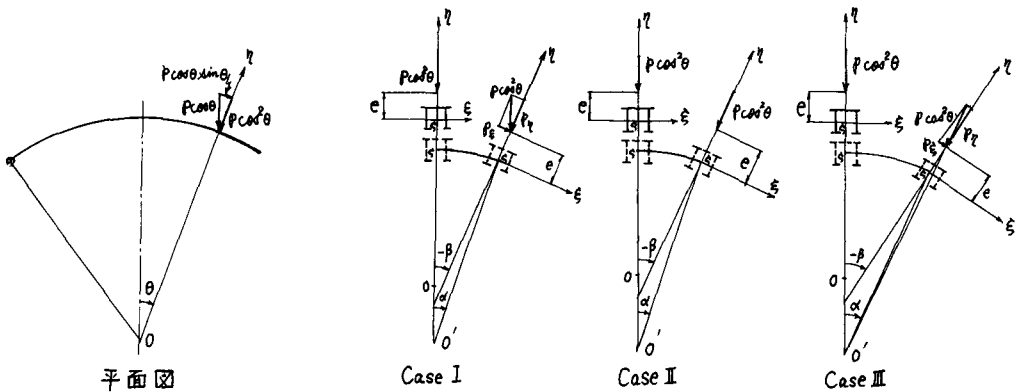
$$\text{ここに } Q_s = -\{EJ_y\{u''-(y_H\beta)''-\beta k_s\}\}' - M_s(\beta'+u'k_s) + k_s\{\bar{G}I(\beta'+u'k_s)-EC_w(\beta'+u'k_s)''\} - m_p \quad (5)$$

$$\bar{G}I = GI + Q_s i_p^2 + M_s k_x \quad (6)$$

微分記号(')は、アーチ軸に沿った長さ s に関するものである。

上式中、 k_0 は、変形前のアーチの面内曲率、 k_s, k_p, k_y は、変形後の曲率及び捩れ率、 EJ_x, EJ_y は、各軸まわりの曲げ剛性、 GI は捩り剛性、 $\bar{G}I$ は、図心に関する換算捩り剛性、 i_p^2 は図心に関する断面極モーメント、 k_x は、 x 軸に関する断面の非対称性を表わす断面固有の定数、 EC_w は、曲げ捩り剛性、 F は、部材断面積である。

4. 荷重方向と境界条件 鉛直等分布荷重 P は、断面図心より上方に、偏心距離 e なる断面对称軸上の点に作用するものとする。変形後の荷重方向としては、次の三つの場合を考えている。 Case I; P の作用方向が、常に初めの方向に平行な場合。 Case II; P の作用方向が、常に対称主軸 y に一致する場合。 Case III; P が常に、変形後の曲率中心に向う場合。——(図-4)参照



(図-4)

境界条件としては、面外変形に対しては、すべての変位量及び捩りによるそりが、拘束されている場合を考えている。すなわち、 $\theta = \pm \varphi$ で $\alpha = 0, \beta = 0, d\alpha/d\theta = 0, d\beta/d\theta = 0$

面内変形については、次の二つの場合を考えている。 Case-a (2-Hinge Arch); $\theta = \pm \varphi$ で $v = 0, w = 0, v' - w' = 0$, Case-b (Fixed Arch); $\theta = \pm \varphi$ で $v = 0, w = 0, v' = 0$ 従って、荷重方向と境界条件の組合わせにより、Case I-a, Case I-b 等 6通りの場合が考えられるが、ここでは、以後 Case I-a の場合を例に取って説明する。

5. 頂点の撓みと変形後の曲率及び断面力 式(1),(2)を解いて、頂点の撓み δ_0 を求めると、 $1 + v''_0 - (k_0 w)''_0 \approx 1, e/k \approx 0$ を考慮して、 $\delta_0 = \bar{\gamma}_R \times \bar{Y}R$ と表わせる。ここに、 $\bar{\lambda} = PR^2/EJ_x, \bar{k} = R^2 EF/EJ_x$ であり、 $\bar{\gamma}$ は、 $\bar{\lambda}, \bar{k}$ 及び v 中心角 φ の函数である。従って変形後の曲率は、 $1/\rho = 1/R \cdot (1 - \delta_0/r + \delta_0/k) = 1/R (1 - \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \times \frac{\bar{\lambda} \bar{\gamma}}{\bar{k}}) = \frac{a}{R}$ と書ける。

ここに、 $a = 1 - \frac{\pi \bar{r}}{K}$, $\gamma = \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \times \bar{r}$ である。次に、満載鉛直等分布荷重を受ける円弧アーチの水平反力 H , 面内曲げモーメント M_s , 軸力 Q_s を、それぞれ、次のように表わしておく。

$$H = PR\Gamma, M_s = -\frac{PR^2}{4} \cos 2\theta + PR^2 \Gamma \cos \theta - PR^2 \Phi, Q_s = PR_2 \cdot d \cos 2\theta - PR\Gamma d \cdot \cos \theta - PR_2 \{d + 2\Gamma(1-d)\} \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \Gamma = \frac{3(\varphi \cos \varphi \cos 2\varphi - \sin \varphi) + (7-4K^{-1}) \sin 3\varphi}{6\varphi(2 + \cos 2\varphi + K^{-1}) - 3(3-K^{-1}) \sin 2\varphi}, \Phi = \frac{1}{4}(4\Gamma \cos \varphi - \cos 2\varphi), d = \begin{cases} 0 & Q_s = -H = \text{const} \\ 1 & Q_s \neq \text{const} \end{cases}$$

6. 横倒れ座屈の基礎方程式

式(3),(4)を適当に変形し、変形後の荷重項、及び式(5),(6),(7)を代入する。この時、 $k_s = \frac{1}{3} = \frac{q}{R}$, $\frac{3q}{R} \ll 1$ とし、 $u = p\alpha$, $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{ds}$ なる変換を行う。さらに、無次元量 $\lambda_k = \frac{PR^2}{EI_y}$, $m = \frac{GI_y}{EI_y}$, $n = \frac{EC_w}{R^2 EI_y}$, $k = \frac{EI_y}{R^2 EF}$, $k_0 = \frac{ip^2}{R^2}$, $\nu_0 = \frac{q}{R}$, $e_0 = \frac{q}{R}$, $f_0 = \frac{k_2}{R}$ を導入すると、基礎方程式は、次の形で得られる。

$$A_1 \alpha'''' + (A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos \theta + A_4) \alpha'' + (A_5 \sin 2\theta + A_6 \sin \theta) \alpha' + A_7 \beta'''' + (A_8 \cos 2\theta + A_9 \cos \theta + A_{10}) \beta'' + (A_5 \sin 2\theta + A_6 \sin \theta) \beta' + (A_{11} \cos 2\theta + A_{12} \cos \theta + A_{13}) \beta = 0 \quad (8)$$

$$B_1 \alpha'''' + (B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos \theta + B_4) \alpha'' + (B_5 \sin 2\theta + B_6 \sin \theta) \alpha' + B_7 \beta'''' + (B_8 \cos 2\theta + B_9 \cos \theta + B_{10}) \beta'' + (B_5 \sin 2\theta + B_6 \sin \theta) \beta' + (B_{11} \cos 2\theta + B_{12} \cos \theta + B_{13}) \beta = 0 \quad (9)$$

上式の係数 A_i 及び B_i は、上記の無次元量より成る式である。

7. 近似解による座屈条件式

前記の式(8),(9)は、 α, β に関して、4階の変数係数連立微分方程式であり、一般には、厳密解を得るのは困難なので、Galerkinの方法で、座屈条件式を求めた。基底函数として、境界条件を満たす $Y_i(\theta) = \cos \frac{2i}{l} \theta - \cos \pi i$ を選ぶと、式(8),(9)は、次の形に書き表わされる。

$$\sum_{j=1}^l \delta_{ij} a_j + \sum_{j=1}^l \delta'_{ij} b_j = 0, \quad \sum_{j=1}^l \delta''_{ij} a_j + \sum_{j=1}^l \delta'''_{ij} b_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

上式における a_j, b_j が、零以外の解を持つという条件より、座屈条件式が得られる。すなわち、上式の係数行列式を、零と置いて次式を得る。

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta'_{11} & \delta'_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta'_{21} & \delta'_{22} \\ \delta''_{11} & \delta''_{12} & \delta'''_{11} & \delta'''_{12} \\ \delta''_{21} & \delta''_{22} & \delta'''_{21} & \delta'''_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

ここに、行列要素 $\delta_{ij}, \delta'_{ij}, \delta''_{ij}, \delta'''_{ij}$ は、先に考げた無次元パラメーター、中心角 φ 等の複雑な函数である。

8. 横倒れ座屈係数の数値計算

先に考げた無次元パラメーターに、適当な数値を与えると、式(10)は、座屈荷重を代表するパラメーター λ_k に関する一般の固有値問題となるから、式(10)を、Hessenbergの方法により、固有多項式に展開し、さらにNewtonの方法によって、固有値 λ_k を算出した。 $k_0=0, \nu_0=0, e_0=0, f_0=0, K=0, \bar{K}=0, \gamma=0, a=1$ の場合について、計算した結果を(図-5)～(図-10)に示す。 l はアーチ円弧長である。

9. 考察

アーチの中心角が、一定な場合、 $m (= \frac{GI_y}{EI_y})$ が、十分に大なる場合は、 $n (= \frac{EC_w}{R^2 EI_y})$ の大小に関係なく、座屈荷重は一定値に近づくが、 m が小さい場合は、 n の大小が、座屈荷重の大小に、大きく影響を与える。アーチのスパン・ライズ比が、

大きくなれば、当然横倒れを起こし易くなるが、 m が小さくなるほど、その影響は顕著である。

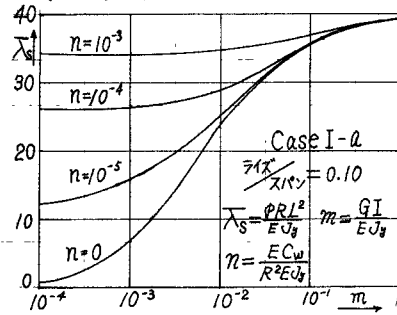
載荷全荷重の大きさが等しいとして、鉛直等分布荷重の場合の座屈荷重を、求心

等分布荷重の場合のそれと比較した場合(この比較法は、中心角 φ_0 が大きくなればその意味を失う。)、通常のアーチ($\varphi_0 = 0.2\pi \sim 0.5\pi$)で、援り剛性の比較的小さい断面($m = 10^{-4} \sim 10^{-3}$)の場合には、かなり小さくなる(10~20%程度)傾向がある。従って、この場合には、危険側となるが、計算例が少ないので、断言はできない。

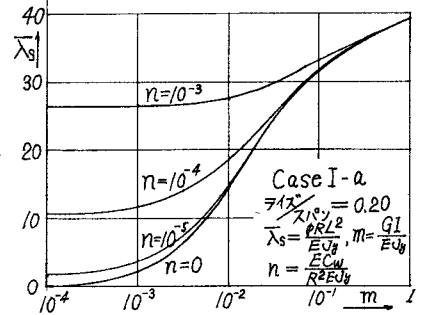
その他、通常のスパン・ライズ比のアーチでは、面内方向の支承条件の座屈荷重に及ぼす影響は、無視できるまでに小さい、軸力を水平反力で近似して、座屈荷重を算出しても、その誤差は、無視し得る、等の結果を得ている。

なお、計算には、日本電子計算機k.k.の計算機 Burroughs B-5500 を用いた。

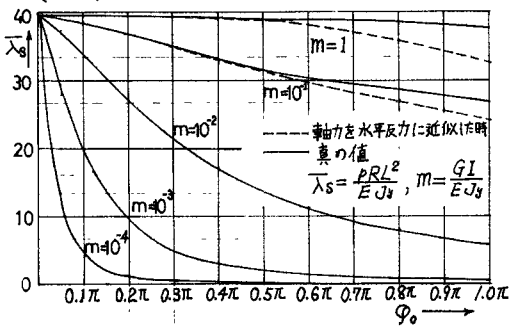
(図-5) m, n と座屈係数の関係



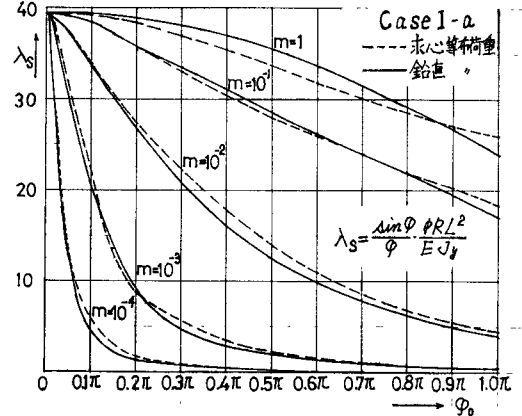
(図-6) m, n と座屈係数の関係



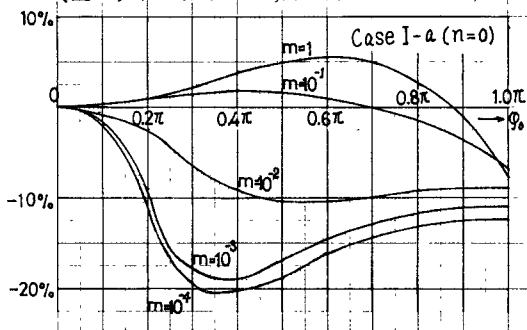
(図-7) 中心角 φ_0 と座屈係数の関係($n=0$)



(図-8) 求心等分布荷重の座屈係数との比較



(図-9) 求心等分布荷重の座屈係数に対する増減率



(図-10)

Case I-b(面内固定)のCase I-a(面内ピン)に対する座屈係数の減少率

