

鋼桁の横座屈に関する考察

大阪大学 正員

前田 幸雄

1. 緒言 近時、高張力鋼の使用により薄肉化するプレート・ガーターについてウェブの変形を考慮して、弾性横座屈応力の問題を取扱ったものである。

2. ウェブの変形を考慮しない場合の基本式

Fig. 1 と参照して $u_p, \bar{v}_p, \bar{w}_p$ = 任意点 P の変位ベクトルの固定軸 (ξ, η, ζ) 方向の成分; π 軸 = 座屈前の桁の長さ方向の重心軸; $u, \bar{v}, \bar{w}$ = セン断中心 S の ξ, η, ζ 方向の変位成分; $\phi(\pi, \eta) =$ 捩りに関する反り函数とすれば

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u + \pi(\cos\beta - 1) - (\eta - \eta_0)\sin\beta, \quad \bar{v}_p = \bar{v} + \pi\sin\beta + (\eta - \eta_0)(\cos\beta - 1) \\ \bar{w}_p &= \bar{w} - \{\pi\cos\beta - (\eta - \eta_0)\sin\beta\} \frac{d\bar{u}}{d\pi} - \{\pi\sin\beta + (\eta - \eta_0)\cos\beta\} \frac{d\bar{v}}{d\pi} + \phi \frac{d\bar{w}}{d\pi} \end{aligned} \right\} (1)$$

変位 $\bar{v}$ 及び $\bar{w}$, P 点に於ける Fiber Strain $\bar{\epsilon}$ は座屈前の初期量 $\bar{v}_0, \bar{w}_0, \epsilon_0$ 及び座屈の間の増分 $\bar{v}, \bar{w}, \epsilon$ に分け得るとすれば,

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}, \quad \bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_0 + \epsilon \quad (2)$$

β が微小量なることと高次の項の省略を考えると式 (1), 式 (2) を用いて

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{d\bar{w}}{d\pi} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\pi} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\bar{u}}{d\pi} \right) \left(\frac{d\bar{v}}{d\pi} \right) + \left(\frac{d\bar{v}}{d\pi} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\bar{v}}{d\pi} \right) \left(\frac{d\bar{w}}{d\pi} \right) + (\eta - \eta_0) \left(\frac{d\bar{w}}{d\pi} \right)^2 \right] \\ &\quad + \phi \frac{d^3\bar{w}}{d\pi^3} - \pi \left(\frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} + \beta \frac{d^2\bar{v}}{d\pi^2} + \beta \frac{d^2\bar{w}}{d\pi^2} \right) \\ &\quad - (\eta - \eta_0) \left(\frac{d^2\bar{v}}{d\pi^2} - \beta \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} - \frac{\beta^2}{2} \frac{d^2\bar{v}}{d\pi^2} \right) + \frac{\beta^2}{2} \pi \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} + \frac{\beta^2}{2} (\eta - \eta_0) \frac{d^2\bar{v}}{d\pi^2} \end{aligned} \quad (3)$$

次に $\int \epsilon E dA = 0$ と適用して, $d\bar{w}/d\pi$ を計算し, 更に π 軸回りの内部 E-メントと座屈の間の桁に僅く外部 E-メントと等置して,

$$\frac{d^2\bar{v}}{d\pi^2} = \beta \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} - k \left(\frac{d\bar{w}}{d\pi} \right)^2, \quad \text{ここで } k = \eta_0 - \left(\frac{1}{2L} \right) \int_0^L \eta (\pi^2 + \eta^2) dA \quad (4)$$

分布荷重 $p(\pi)$ と重心に作用する軸力 P が存在する場合, 式 (4) を用いて, 平衡条件から

$$\frac{d^2}{d\pi^2} (EI_y \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2}) + P \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} + \frac{d^2}{d\pi^2} (M + P\eta_0) \beta = 0, \quad \text{及び} \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\pi} (GI_J \frac{d\bar{\beta}}{d\pi}) - \frac{d}{d\pi} (P \phi \frac{d\bar{\beta}}{d\pi}) - \frac{d}{d\pi} (EC_w \frac{d^3\bar{w}}{d\pi^3}) - (M + P\eta_0) \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} - 2 \frac{d}{d\pi} (k M \frac{d\bar{\beta}}{d\pi}) + p \phi \beta = 0 \quad (6)$$

但し, $\beta^2 = \frac{I}{A} = \frac{1}{A} \int_0^L \{ \pi^2 + (\eta - \eta_0)^2 \} dA$, $C_w =$ セン断中心に関する反り常数, $J =$ 捩り常数, $M = \pi$ 軸回りの E-メント

此の問題をエネルギー理論で扱うと, 座屈時に於けるポテンシャルエネルギーの総変化量 U は

$$U = V + U_1 + U_2 \quad (7)$$

と表され, ここで $V =$ 座屈の間の変形した桁の内部ポテンシャルエネルギー, $U_1 =$ 座屈の間の軸力 P のポテンシャルエネルギー,

$U_2 =$ 座屈の間の分布荷重 $p(\pi)$ のポテンシャルエネルギーである。 V と U_1 を通常の梁理論で, 又 U_2 を式 (4) を用いて計算すれば,

$L =$ 桁の長さ とし

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_y \left(\frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} \right)^2 + EC_w \left(\frac{d^3\bar{w}}{d\pi^3} \right)^2 + GI_J \left(\frac{d\bar{\beta}}{d\pi} \right)^2 - P \left\{ \left(\frac{d\bar{u}}{d\pi} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{v}}{d\pi} \right)^2 - 2\eta_0 \beta \frac{d\bar{u}}{d\pi} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2M \left\{ \beta \frac{d^2\bar{u}}{d\pi^2} - k \left(\frac{d\bar{w}}{d\pi} \right)^2 \right\} - p \phi \beta^2 \right] d\pi \end{aligned} \quad (8)$$

3. ウェブの変形を考慮した捩り抵抗 (Fig. 2)

同じ断面でウェブがセン断中心の周りに外力の捩り E-メント m_d をうけて Fig. 2 の如く変形したとすれば,

弾性条件として $d_u = e_u \cdot \beta$, $d_v = e_v \cdot \beta$, $\beta_u = \beta - \alpha_u$, $\beta_v = \beta - \alpha_v$

変形の釣り合い式として $EI_{uf} \cdot e_u \frac{d^2\beta}{d\pi^2} = d_u$, $EI_{vf} \cdot e_v \frac{d^2\beta}{d\pi^2} = d_v$ (9)

$$GI_{uf} \left(\frac{d^2\beta}{d\pi^2} - \frac{d^2\alpha_u}{d\pi^2} \right) = -m_u, \quad GI_{vf} \left(\frac{d^2\beta}{d\pi^2} - \frac{d^2\alpha_v}{d\pi^2} \right) = -m_v \quad (10)$$

$$GJ_w \frac{d^3 \theta}{dz^3} = -(M_u - d_u e_u - d_l e_l - m_u - m_l) \quad (11)$$

$$\frac{2D_w}{d_w} (2\alpha_u + \alpha_l) = m_u, \quad \frac{2D_w}{d_w} (2\alpha_l + \alpha_u) = m_l \quad (12)$$

ここで I_{uf} , I_{lf} はそれぞれ、下フランジのフランジ面に垂

直な重心軸回りの断面二次モーメント、 GJ_{uf} , GJ_{lf} , GJ_w

= それぞれ、上、下フランジ、ウェブの慣性剛性、 D_w = 板の曲げ剛

性 = $\frac{E t_w^3}{12(1-\nu^2)}$ 、平衡条件としては

$$\delta_u = \delta_l, \quad I_{uf} e_u \frac{d^3 \theta}{dz^3} = I_{lf} e_l \frac{d^3 \theta}{dz^3}$$

今 $2 \frac{I_{uf} I_{lf}}{I_{uf} + I_{lf}} = I_{FL}$ とおいて式(9)と式(11)、式(10)と式(12)

から

$$-GJ_w \frac{d^3 \theta}{dz^3} + \frac{EI_{FL} d^2 \theta}{2} + \frac{6D_w}{d_w} (\alpha_u + \alpha_l) = M_d \quad (13)$$

$$-GJ_{uf} \frac{d^3 \theta}{dz^3} + \frac{2D_w}{d_w} (2\alpha_u + \alpha_l) + GJ_{lf} \frac{d^3 \theta}{dz^3} = 0, \quad -GJ_{lf} \frac{d^3 \theta}{dz^3} + \frac{2D_w}{d_w} (2\alpha_l + \alpha_u) + GJ_{uf} \frac{d^3 \theta}{dz^3} = 0 \quad (14)$$

$$\text{式(14)から} \quad \alpha_u = -J_u \frac{d^3 \theta}{dz^3} \frac{GJ_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} - J_{lf}))}{G^2 J_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} + J_{lf}) + \frac{12D_w^2}{d_w^2})}, \quad \alpha_l = -J_l \frac{d^3 \theta}{dz^3} \frac{GJ_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{lf} - J_{uf}))}{G^2 J_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} + J_{lf}) + \frac{12D_w^2}{d_w^2})} \quad (15)$$

$$\text{ここで } J_u = \frac{6D_w}{d_w} \frac{GJ_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} - J_{lf}))}{G^2 J_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} + J_{lf}) + \frac{12D_w^2}{d_w^2})}, \quad J_l = \frac{6D_w}{d_w} \frac{GJ_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{lf} - J_{uf}))}{G^2 J_{uf} J_{lf} (I_{FL}^2 + \frac{2D_w}{d_w} (2J_{uf} + J_{lf}) + \frac{12D_w^2}{d_w^2})}$$

4. ウェブの歪みと考慮した座屈応力式

エネルギーの問題として扱う場合、ウェブ板は曲げ剛性 D_w

を持つ梁におきかえられ、その歪みは Fig. 2 (c) の如くで、任意点 s のタビ $w = \frac{s(d_w - s)}{2d_w} \{ (2d_w - s) m_u - (d_w + s) m_l \}$ となる。

これを用いて計算したウェブ歪みによる内部歪エネルギーとフランジの回転による歪エネルギーとを式(8)に加えると、半断面

に対して $P=0$, $M_d=0$ の場合

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[-\frac{M^2}{EI_y} \beta^2 - \{ 2k M \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 - 8\beta^2 \frac{d^2 M}{dz^2} \} + EI_w \left(\frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 + GJ \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{d_w}{3D_w} (J_{uf} J_u + J_{lf} J_l) \frac{d\theta}{dz} \frac{d\beta}{dz} \right. \\ \left. + \left(\frac{d_w}{6D_w} \right)^2 (J_u^2 J_{uf} + J_l^2 J_{lf}) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{d_w}{9D_w} (J_u^2 + J_u J_l + J_l^2) \left(\frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 \right] dz \quad (16)$$

U は接合部状態からのポテンシャルエネルギーの变化を示し、平衡状態が安定から不安定に変化する条件として、

$U=0$ を適用し、且つ $M = m(x) M_{max}$, $x = x/L$ なる表現を用いると

$$\frac{M_{max}^2}{EI_y} \int_0^1 m^2 \beta^2 dx - \frac{M_{max}^2}{L^2} \left\{ 8 \int_0^1 \left(\frac{d^2 m}{dx^2} \right)^2 \beta^2 dx - 2k \int_0^1 m \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx \right\} - \frac{EI_w}{L^4} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{GJ}{L^2} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \\ + \frac{d_w G}{3D_w L^2} (J_{uf} J_u + J_{lf} J_l) \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \left(\frac{d\beta}{dx} \right) dx + \left(\frac{d_w}{6D_w} \right)^2 \frac{1}{L^4} (J_u^2 J_{uf} + J_l^2 J_{lf}) \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{d_w}{9D_w L^2} (J_u^2 + J_u J_l + J_l^2) \int_0^1 \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx = 0$$

これを解いて

$$C_{\theta} = A_1 \frac{EI_y}{(kL)^2 W_k} \left[A_2 g - A_3 k + \left(A_2 g - A_3 k \right)^2 + \frac{C_w}{I_y} \left(1 + \frac{GJ L^2}{\pi^2 EI_w} \right) + \frac{6d_w}{3EI_y L^2} \left\{ 4(J_{uf} J_u + J_{lf} J_l) A_4 + \frac{Gd_w}{12D_w L^2} (J_u^2 J_{uf} + J_l^2 J_{lf}) A_5 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} (J_u^2 + J_u J_l + J_l^2) \right\} \right] \quad (17)$$

$$\text{ここで } W_k = \frac{I_x}{k + \frac{I_y}{L^2}}, \quad C_w = \frac{EI_w d_w^2}{2}, \quad K^2 = \pi^2 \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right)^2 dx}, \quad A_1 = \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx}{\sqrt{\left(\int_0^1 m^2 \beta^2 dx \right) \left(\int_0^1 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right)^2 dx \right)}}, \quad A_5 = \frac{\int_0^1 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 \left(\frac{d^2 m}{dx^2} \right)^2 \beta^2 dx}{\left(\int_0^1 m^2 \beta^2 dx \right) \left(\int_0^1 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right)^2 dx \right)}, \quad A_3 = \frac{\int_0^1 m \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx}{\sqrt{\left(\int_0^1 m^2 \beta^2 dx \right) \left(\int_0^1 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right)^2 dx \right)}}, \quad A_4 = \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx}$$

式(17)のカッコ内]内の第3, 4, 5項がウェブ板の歪みを表している。 C_{θ} は m と β の函数であって、通常の桁には境界条件を満足する β の形として $\phi \sin \pi x$ または $\phi \cos \pi x$ とおき、又荷重に応じた曲げモーメントの分布から m を定める時は、 $K, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ が計算出来、与えられた1軸対称断面桁の弾性横座屈応力を求めることができる。

5. 数値計算例

フレート・ガーダーについて各種鋼材毎に計算した結果は當日発表する。