Ⅱ～12

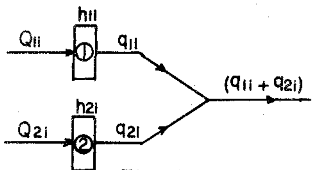
貯水池群の操作に関する推計的方法

大阪大学工学部　正員　室田　明
同　　　　　　　正員　○神田　徹
同　大学院　学生員　端野道夫

年々増大する水需要に応えるために、1河川の本川,支川の既設貯水池に加えて、順次、貯水池が増設され、貯水池群が形成されつゝあるが、利水を主目的とする貯水池群の操作方式の決定に対してORの手法を適用し考察する。1水年内の河川流量および需要水量は各期間(たとえば月，季節)によりそれぞれ異なった値をとるから、これはDPによる多段階決定過程の問題として取扱うことが可能である。単一貯水池の最適操作に対して成立する最適性の原理[(1)(2)]を、直列，並列に設置した2個の貯水池系に適用してそれぞれの最適操作の決定方式を述べ、さらに3個以上の貯水池群の操作決定に対しても基本的には2個の貯水池系の決定方法で近似できると考えて一試案を示す。

1、2個の貯水池系の最適操作

(1)　並列貯水池



Fig－1

貯水池1および2によって得られる利潤が、貯水池流入量，水位および放流量の関数であるとし、1水年内の期間i(たとえばi月またはi季節)の利潤を次式で表わす。

$$B_i(h_{1i},h_{2i},q_{1i},q_{2i},Q_{1i},Q_{2i})=X_{1i}(h_{1i},Q_{1i})+Y_{1i}(q_{1i})+X_{2i}(h_{2i},Q_{2i})+Y_{2i}(q_{2i})+Z_i(q_{1i}+q_{2i}) \quad (1)$$

ここに、h_i：期間iのはじめの貯水池水位，q_i：期間iの放流量，Q_i：期間iの流入量，X_i：期間iの、貯水池水位による高低水被害を表わす評価関数，Y_i, Z_i：期間iの、貯水池下流の用水利益を表わす評価関数
添字1,2は、それぞれ貯水池1,2の諸量を表わす。

期間iから期間Nまでの総利潤を

$$K_i=\sum_{i=i}^{N} B_i(h_{1i},h_{2i},q_{1i},q_{2i},Q_{1i},Q_{2i}) \quad (2)$$

とおき、K_iの期待値に対して最適性の原理を適用すれば、次の漸化式が成立する。

$$E_i^*(K_i)=E_i^*(h_{1i},h_{2i})=\max_{\left(\substack{q_{1i}=q_{1i}^*\\ q_{2i}=q_{2i}^*}\right)}\iint\{B_i+E_{i+1}^*(h_{1,i+1},h_{2,i+1})\}f_i(Q_{1i},Q_{2i})\,dQ_{1i}\,dQ_{2i} \quad (3)$$

ここに、$E_{i+1}^*(h_{1,i+1},h_{2,i+1})$：期間$(i+1)\to$Nの総利潤$(K_{i+1})$の期待値を最大にする放流操作を行った時$(q_{1j}=q_{1j}^*,\ q_{2j}=q_{2j}^*\ (j=i+1,\cdots N))$の総利潤の期待値――最適総利潤
$E_i^*(h_{1i},h_{2i})$：期間iについての最適総利潤
$q_{1i}^*(h_{1i},h_{2i})$, $q_{2i}^*(h_{1i},h_{2i})$：期間$i\to$Nの総利潤(K_i)の期待値を最大にする期間iの放流量――最適放流量
Q_{1i}, Q_{2i}：期間iの貯水池流入量．ただし、Q_1, Q_2ともに各期間の流入量は互いに独立であるものとする。
$f_i(Q_{1i},Q_{2i})$：Q_{1i}, Q_{2i}の同時密度関数

期間 i の初期水位 h_i と期間 $(i+1)$ の初期水位 h_{i+1} の間には、次の連続式が成立する。

$$h_{1.i+1} = h_{1i} + Q_{1i} - q_{1i} \ , \quad h_{2.i+1} = h_{2i} + Q_{2i} - q_{2i} \tag{4}$$

ここに、Q, q は水位に換算した値をとる。

Q_{1i} と Q_{2i} が互いに独立ではなく、両者の間に直線回帰性がある場合には、$Q_{2i} = k_i Q_{1i}$ (k_i :定数) となり、(3)(4) 式はそれぞれ次式となる。

$$E_i^*(K_i) = E_i^*(h_{1i}, h_{2i}) = \max\begin{pmatrix} q_{1i}=q_{1i}^* \\ q_{2i}=q_{2i}^* \end{pmatrix} \int \left\{ B_i + E_{i+1}^*(h_{1.i+1}, h_{2.i+1}) \right\} f_i'(Q_{1i})\, dQ_{1i} \tag{5}$$

$$h_{1.i+1} = h_{1i} + Q_{1i} - q_{1i} \ , \quad h_{2.i+1} = h_{2i} + k_i Q_{1i} - q_{2i} \tag{6}$$

初期条件 $E_N^*(h_{1N}, h_{2N})$ を仮定し、水位、放流量の制限条件の下で(3)(4)式または(5)(6)式によって最終期間 N から順次、期間 (N−1), (N−2) ··· の最適放流量 $q_{1i}^*(h_{1i}, h_{2i})$, $q_{2i}^*(h_{1i}, h_{2i})$ および最適総利潤 $E_i^*(h_{1i}, h_{2i})$ を計算する。何サイクルかの水年を経て、$q_{1i}^{*(j-1)} = q_{1i}^{*(j)}$, $q_{2i}^{*(j-1)} = q_{2i}^{*(j)}$ ($j-1, j$: 水年) となる q_{1i}^*, q_{2i}^* の収斂値に達して計算を終る。すなわち、

$$q_{1i}^* = q_{1i}^*(h_{1i}, h_{2i}) \ , \quad q_{2i}^* = q_{2i}^*(h_{1i}, h_{2i}) \tag{7}$$

として、最適放流量が水位 (h_{1i}, h_{2i}) の関数で得られる。このとき、

$$E_i^{*(j)}(h_{1i}, h_{2i}) - E_i^{*(j-1)}(h_{1i}, h_{2i}) = E^* \quad : \text{const} \tag{8}$$

として、1水年間の平均総利潤の期待値 E^* が得られる。

決定された最適放流量 q_{1i}^*, q_{2i}^* によって操作した時の水位の定常確率は次の方法で求める。

①試行法 —— 既往の(または Monte Carlo 法による)流入量資料の時系列を直接代入し、試算的に水位の定常確率を得る。

②水位の推移確率行列 $\mathbb{P}$ をつくれば、高次の推移確率行列 $\mathbb{P}^n$ の成分 p に対して次の関係が成立つ。

$$p(h_{1.i+1}, h_{2.i+1} | h_{1i}, h_{2i}) = g_i(h_{1.i+1} - h_{1i} + q_{1i}^*, h_{2.i+1} - h_{2i} + q_{2i}^*)$$

$$p(h_{1.i+2}, h_{2.i+2} | h_{1i}, h_{2i}) = \sum_{h_{1.i+1}} \sum_{h_{2.i+1}} \left\{ g_{i+1}(h_{1.i+2} - h_{1.i+1} + q_{1.i+1}^*, h_{2.i+2} - h_{2.i+1} + q_{2.i+1}^*) \cdot p(h_{1.i+1}, h_{2.i+1} | h_{1i}, h_{2i}) \right\}$$

$$\vdots$$

$$p(h_{1i}, h_{2i}^{(j)} | h_{1i}, h_{2i}^{(1)}) = p(h_{1i}, h_{2i}) \tag{9}$$

ここに、$p(h_{1i}, h_{2i}^{(j)} | h_{1i}, h_{2i}^{(1)})$: 初期水年の期間 i の水位が $(h_{1i}, h_{2i}^{(1)})$ であるとき j 水年の水位が $(h_{1i}, h_{2i}^{(j)})$ となる推移確率

$p(h_{1i}, h_{2i})$: 水位 (h_{1i}, h_{2i}) の定常確率

g_i, g_{i+1} : 離散的流入量 (Q_{1i}, Q_{2i}), $(Q_{1.i+1}, Q_{2.i+1})$ の密度関数

すなわち、長期間を経た後に、初期水位に関係しない水位の定常確率を得る。

ところで、流入量 Q_{1i}, Q_{2i} が互いに独立である場合には、(9)式において水位のあらゆる状態 (h_{1i}, h_{2i}) に対して 0 でない定常確率が存在するから、マルコフ鎖をなす水位の状態 (h_{1i}, h_{2i}) はエルゴード状態である。一方、Q_{1i}, Q_{2i} が独立でない場合には、状態 (h_{1i}, h_{2i}) は連続式(6)の関係を保ちながら翌年の状態に推移するから、状態 (h_{1i}, h_{2i}) のいくつかは一時的な状態となるであろう。すなわち、この場合は状態 (h_{1i}, h_{2i}) は消散部分をもつマルコフ鎖となり、その定常確率は次式のようになる。

$$p(h_{1i}, h_{2i}) = \begin{cases} p(h_{1i}, h_{2i}) & \text{—— エルゴード部分の状態} (h_{1i}, h_{2i})^e \text{に対して.} \\ 0 & \text{—— 消散部分の状態} (h_{1i}, h_{2i})^o \text{に対して.} \end{cases} \tag{10}$$

つぎに、1,2貯水池系と同一機能をもつ1個の等価貯水池を形式的に仮定し、この貯水池に関する水位h_{0i},放流量q_{0i},流入量Q_{0i}を次のように置く。

$h_{0i}=h_{1i}+h_{2i}$ —— (11), $q_{0i}=q_{1i}+q_{2i}$ —— (12), $Q_{0i}=Q_{1i}+Q_{2i}$ —— (13)

$\alpha_i=h_{1i}/h_{0i}$, $\beta_i=q_{1i}/q_{0i}$ —— (14) $q^*_{0i}=q^*_{1i}+q^*_{2i}$ —— (15) $\beta^*_i=q^*_{1i}/q^*_{0i}$ —— (16)

上式を用いると(7)式は次式となる。

$$q^*_{0i}=q^*_{0i}(h_{0i},\alpha_i)\ ,\quad \beta^*_i=\beta^*_i(h_{0i},\alpha_i) \tag{17}$$

同様にして、(9)(10)式は次式となる。

$$p(h_{0i},\alpha_i^{(j)}|h_{0i},\alpha_i^{(i)})=p(h_{0i},\alpha_i) \tag{18}$$

$$p(h_{0i},\alpha_i)=\begin{cases} P(h_{0i},\alpha_i) & \text{—— エルゴード部分の状態}(h_{0i},\alpha_i)\text{に対して。} \\ 0 & \text{—— 消散部分の状態}(h_{0i},\alpha_i)\text{に対して。} \end{cases} \tag{19}$$

(2) 直列貯水池

1,2貯水池系による総利潤の期待値に最適性の原理を適用すれば次式となる。

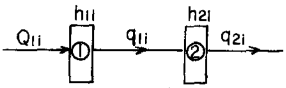


Fig-2

$$E^*_i(K_i)=E^*_i(h_{1i},h_{2i})=\max\begin{pmatrix} q_{1i}=q^*_{1i} \\ q_{2i}=q^*_{2i}\end{pmatrix}\int\left\{B_i+E^*_{i+1}(h_{1,i+1},h_{2,i+1})\right\}f(Q_{1i})dQ_{1i} \tag{20}$$

$$B_i=X_{1i}(h_{1i},Q_{1i})+Y_{1i}(q_{1i})+X_{2i}(h_{2i},q_{1i})+Y_{2i}(q_{2i}) \tag{21}$$

水位の連続式は次式となる。

$$h_{1,i+1}=h_{1i}+Q_{1i}-q_{1i}\ ,\quad h_{2,i+1}=h_{2i}+q_{1i}-q_{2i} \tag{22}$$

最適放流量は並列の場合と同様に計算できて、次式となる。

$$q^*_{1i}=q^*_{1i}(h_{1i},h_{2i})\ ,\quad q^*_{2i}=q^*_{2i}(h_{1i},h_{2i}) \tag{23}$$

連続式(22)によれば、水位の状態(h_{1i},h_{2i})は消散部分をもつマルコフ鎖をなすと考えられるから(10)式で表わされる水位の定常確率が得られる。

つぎに、1,2貯水池系の等価貯水池を仮定して次のように置く。

$h_{0i}=h_{1i}+h_{2i}$, —— (24) $q_{0i}=q_{2i}$ —— (25) $\alpha_i=h_{1i}/h_{0i}$, $\beta_i=q_{1i}/q_{0i}$ —— (26)

$q^*_{0i}=q^*_{2i}$ —— (27) $\beta^*_i=q^*_{1i}/q^*_{0i}$ —— (28)

上式を用いると(23)式は次式となる。

$$q^*_{0i}=q^*_{0i}(h_{0i},\alpha_i)\ ,\quad \beta^*_i=\beta^*_i(h_{0i},\alpha_i) \tag{29}$$

水位の定常確率は(19)式で表わされる。

2. 3個の貯水池系の最適操作

既設の、2個の並列または直列貯水池系に対して、並列または直列に貯水池を増設した、3個の貯水池からなる系を考える。この中、右図のように、既設並列貯水池系に対して直列に増設した貯水池系の最適操作について考察する。1,2貯水池系をこれと等価の1貯水池で置換することができれば、2個の直列貯水池系の場合に帰する。

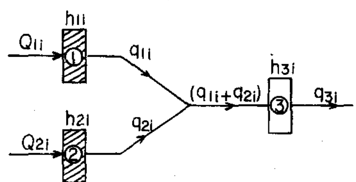


Fig-3

等価貯水池に関する水位,放流量,流入量を(11)~(14)式と置けば、(20)(21)(22)式に対応する式は

それぞれ次式となる。ただし、$Q_{2i}=k_iQ_{1i}$ とする。

$$E_i^*(h_{oi},h_{3i})=\max\begin{pmatrix} g_{oi}=g_{oi}^* \\ g_{3i}=g_{3i}^* \end{pmatrix}\int\left\{B_i+E_{i+1}^*(h_{o,i+1},h_{3,i+1})\right\}f_{oi}(Q_{oi})\,dQ_{oi} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}B_i&=\left\{X_{1i}(h_{1i},Q_{1i})+Y_{1i}(g_{1i})+X_{2i}(h_{2i},Q_{2i})+Y_{2i}(g_{2i})+Z_i(g_{1i}+g_{2i})\right\}+\left\{X_{3i}(h_{3i},g_{1i}+g_{2i})+Y_{3i}(g_{3i})\right\}\\&=\left\{X_{oi}(h_{oi},\alpha_i,Q_{oi})+Y_{oi}(g_{oi},\beta_i)\right\}+\left\{X_{3i}(h_{3i},g_{oi})+Y_{3i}(g_{3i})\right\}\end{aligned} \tag{31}$$

$$h_{o,i+1}=h_{oi}+Q_{oi}-g_{oi}, \qquad h_{3,i+1}=h_{3i}+g_{oi}-g_{3i} \tag{32}$$

ここに、X_{oi}：等価貯水池水位による高低水損害を表わす評価関数

Y_{oi}：等価貯水池放流量による用水利益を表わす評価関数

等価貯水池の評価関数X_{oi}, Y_{oi}は、1, 2 貯水池の水位，放流量の比 α_i，β_iを含むが、以下のごとく、α_i, β_i を一義的に h_{oi} と関係づけることが可能な場合には、1(2)の決定法を適用することができる。すなわち、図のような3個の貯水池系の最適操作に対しても、1, 2貯水池は並列貯水池系(1.(1)の場合)の最適操作に近い操作を行うものと仮定する。これより、h_{oi} が与えられた時のα_iの条件付密度関数は、(19)式を用いて次式で得られる。

$$P(\alpha_i|h_{oi})=P(h_{oi},\alpha_i)\Big/\sum_{\alpha_i=0}^{1}P(h_{oi},\alpha_i) \tag{33}$$

ここに、$\sum_{\alpha_i=0}^{1}P(h_{oi},\alpha_i)$：$h_{oi}$の周辺密度関数

(19)式を得る過程から、この条件付密度関数は、あるα_iの値に対して卓越した値をとることが推察できる。h_{oi}に対して最大確率で生起するα_iをα_i^0とすれば、$\alpha_i^0=\alpha_i^0(h_{oi})$なる関係が得られる。$(h_{oi},\alpha_i^0)$に対する$\beta_i$の値は(17)式より求め、この$\beta_i$を$\beta_i^0$とすれば、$\beta_i^0=\beta_i^0(h_{oi},\alpha_i^0)=\beta_i^0(h_{oi})$ の関係を得る。ゆえに、h_{oi} が与えられた時、この α_i^0, β_i^0 を用いて評価関数 $X_{oi}(h_{oi},\alpha_i,Q_{oi})$, $Y_{oi}(g_{oi},\beta_i)$ の値を定める。すなわち、

$$X_{oi}(h_{oi},\alpha_i,Q_{oi})=X_{oi}(h_{oi},\alpha_i^0,Q_{oi}), \qquad Y_{oi}(g_{oi},\beta_i)=Y_{oi}(g_{oi},\beta_i^0) \tag{34}$$

1, 2貯水池系の操作についてなされた上記の仮定の妥当性および条件付密度関数(33式)の特性は、1, 2, 3 貯水池の機能、あるいは各々が総利潤に寄与する貢献度によって異なるはずである。新設の3貯水池の機能が1, 2貯水池系に比して大きい場合には、計算結果からこれらを照査した後、改めてα_i, β_i を仮定して同様の計算を行えば新たな解が得られるが、この解の最適操作への収斂性に関しては今後の課題としたい。

文献　(1)　Little, J. D. C.　The Use of Storage Water in a Hydroelectric System.　JORSA, Vol. 3 (1955)

(2)　玉井正彰　淀川の河川計画と水管理の研究　昭. 36. 3