

南水路流れにおける拡散過程について (オ9報)

京都大学工学部 正員 工務 今本 博 健
 京都大学大学院 学生員 工務 井上 和 也
 京都大学大学院 学生員 〇白 砂 孝 夫

粒子拡散現象における粒径の効果に關する研究は、従来より多くの研究者によって行なわれており、“粒子による乱流場¹⁾の切断”という概念によって、その定性的特性はある程度説明づけられていゝが、定量的に論ぜられるに至っていない。本報告は、オ4報²⁾に引きつづき、“固体粒子速度は流体粒子速度の体積平均によって与えられる”という仮定に基づいて、若干の理論的考察をするとともに、種々の粒径の発泡ポリスチレン粒子を用いて南水路流れの自由表面上における乱流拡散現象を定量的に、実用上の取り扱いにおける粒径の効果の評価について明らかにしようとするものである。

1. 理論的考察

簡単のため1次元の取り扱いをすることにする。Taylorの拡散理論³⁾によると、 t 時間後の y 方向の分散 σ^2 はつぎのように表わされる。

$$\sigma^2(t) = \int_0^t \int_0^t \overline{u'(t_1)u'(t_2)} dt_1 dt_2 = 2\overline{u'^2} \int_0^t \int_0^{t_1} R(t_2) dt_2 = 2\overline{u'^2} \int_0^t (t-\xi) R(\xi) d\xi \quad (1)$$

また、Einstein⁴⁾の拡散理論によると、分散 σ^2 と拡散係数 D との間に

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} \quad (2)$$

の関係が成立するから、結局、 $\sigma^2(t)$ 、 $D(t)$ 、 $R(t)$ との間には次式が成立する。

$$\sigma^2(t) = 2 \int_0^t D(t_1) dt_1, \quad D(t_1) = \overline{u'^2} \int_0^{t_1} R(\xi) d\xi \quad (3)$$

Lagrange相関関数 $R(t)$ の関数形については、現在まだ解明されていゝが、 ξ のきつめて小さい場合ならびに大きい場合の特性より、 $\sigma^2(t)$ 、 $D(t)$ 、 $R(t)$ は、つぎのように表わすことができる。(fig.1,2,3参照)⁵⁾

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \overline{u'^2} t^2 \quad (0 \leq t \leq t_*) \\ &= 2\overline{u'^2} t_*^2 \left(\frac{t}{t_*} - \frac{1}{2} \right) \quad (t \geq t_*) \\ D(t) &= \overline{u'^2} t \quad (0 \leq t \leq t_*) \\ &= \overline{u'^2} t_* \quad (t \geq t_*) \\ R(t) &= 1 \quad (0 \leq t \leq t_*) \\ &= 0 \quad (t > t_*) \end{aligned}$$

..... (4)

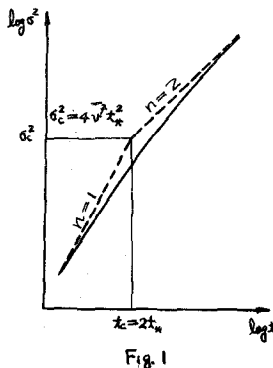


Fig. 1

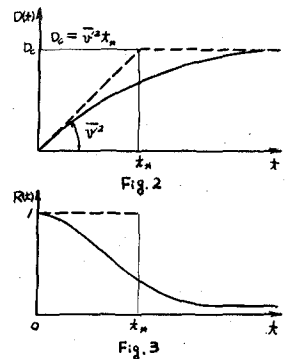


Fig. 2

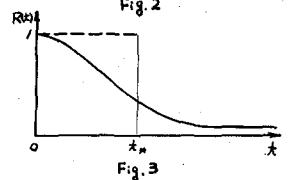


Fig. 3

fig.1,2,3において、実験は実際の拡散現象におけるものであり、また、破線はこれを単純化した(4)式のものである(ただし、 $\sigma^2(t)$ の $t > 2t_*$ における直線は両対数紙上で直線化した

ものである)。

以上の理論は、粒子が流体と同じ運動をするという前提を基礎としたもので、いわゆる流体粒子の運動に対して適用されるものである。したがって、対象としている粒子(固体粒子)が流体粒子に比してさきめて大きい場合には、流体粒子の v の代りに固体粒子速度 U_p を用いる必要があり、 $R(\tau)$ の特性も当然変化するであろう。以下においては、 U_p を対象とした場合の拡散現象について考察する(添字 p は固体粒子に対する量を表わす)。

いま、固体粒子速度は流体粒子速度の体積平均によって表わされるとすると(図4参照)。

$$U_p = \frac{1}{V} \int_V U' dv \quad (5)$$

さらに、簡単のため、この体積平均値をつぎの時間平均値に置きかえ得るものとする。

$$U_p(t_0) = \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t_0+S} U'(\tau) d\tau \quad (6)$$

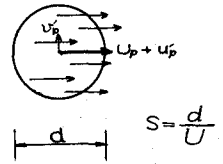


Fig 4

ここに、 S は固体粒子の通過時間(たとえば、 $S = \frac{d}{U}$ d :粒径, U :主流の流速)である。

(6)式を用いると、 $U_p(t_0) U_p(t_0+S)$ は、つぎのように計算できる。

$$\begin{aligned} \overline{U_p(t_0) U_p(t_0+S)} &= \left(\frac{1}{S} \int_{t_0}^{t_0+S} U' dt \right) \left(\frac{1}{S} \int_{t_0+S}^{t_0+S+S} U' dt \right) \\ &= \frac{\overline{U'^2}}{S^2} \left\{ \int_{\frac{S}{2}}^S (\eta - \frac{S}{2} + S) R(\eta) d\eta + \int_{\frac{S}{2}}^{\frac{S}{2}+S} (-\eta + \frac{S}{2} + S) R(\eta) d\eta \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

したがって、固体粒子拡散における拡散係数 $D_p(t)$ は、(7)式および(7)式より

$$D_p(t) = \int_0^t \overline{U_p(t_0) U_p(t_0+S)} d\tau \quad (8)$$

となる。(8)式に(7)式を用いて計算すると、つぎの結果が得られる。

i) $0 \leq t \leq \frac{S}{2}$

$$D_p(t) = \frac{\overline{U'^2}}{S^2} \left[\int_0^t \{ \alpha_2(\eta) + \alpha_3(\eta) + \alpha_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{\frac{S}{2}} \{ \alpha_2(\eta) + \alpha_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{\frac{S}{2}}^S \{ \alpha_1(\eta) + \alpha_6(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_S^{t+S} \alpha_6(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

ii) $\frac{S}{2} \leq t \leq S$

$$D_p(t) = \frac{\overline{U'^2}}{S^2} \left[\int_0^{\frac{S}{2}} \{ \alpha_2(\eta) + \alpha_3(\eta) + \alpha_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{\frac{S}{2}}^t \{ \alpha_2(\eta) + \alpha_5(\eta) + \alpha_6(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^S \{ \alpha_1(\eta) + \alpha_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_S^{t+S} \alpha_6(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

iii) $S \leq t \leq 2S$

$$D_p(t) = \frac{\overline{U'^2}}{S^2} \left[\int_0^{\frac{S}{2}} \{ \beta_1(\eta) + \beta_2(\eta) + \beta_3(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{\frac{S}{2}}^S \{ \beta_1(\eta) + \beta_3(\eta) + \beta_4(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_S^t \{ \beta_3(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{t+S} \beta_5(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

iv) $t \geq 2S$

$$D_p(t) = \frac{\overline{U'^2}}{S^2} \left[\int_0^{\frac{S}{2}} \{ \beta_1(\eta) + \beta_2(\eta) + \beta_3(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_{\frac{S}{2}}^S \{ \beta_3(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_S^t \{ \beta_3(\eta) + \beta_5(\eta) \} R(\eta) d\eta + \int_t^{t+S} \beta_5(\eta) R(\eta) d\eta \right]$$

ここに、 α_i, β_i は次式によって表わされる。

..... (9)

$$\alpha_1(\eta) = \frac{(\eta+s)^2}{2}, \quad \alpha_2(\eta) = t(\eta - \frac{t}{2} + s), \quad \alpha_3(\eta) = t(\eta - \frac{t}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s), \quad \alpha_4(\eta) = \eta(-\frac{\eta}{2} + s)$$

$$\alpha_5(\eta) = t(-\eta + \frac{t}{2} + s), \quad \alpha_6(\eta) = t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2}, \quad \beta_1(\eta) = \frac{(\eta+s)^2}{2}, \quad \beta_2(\eta) = \beta_3(\eta) = \frac{s^2}{2}$$

$$\beta_3(\eta) = t(\eta - \frac{t}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s), \quad \beta_4(\eta) = \eta(-\frac{\eta}{2} + s), \quad \beta_5(\eta) = t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2}$$

(9)式のiv)は、つきのようなになる。

$$D_p(t) = \overline{V}^2 \int_0^{t-s} R(\eta) d\eta + \frac{\overline{V}^2}{s^2} \left[\int_{t-s}^t \left\{ t(\eta - \frac{t}{2} + s) - \eta(\frac{\eta}{2} + s) + \frac{s^2}{2} \right\} R(\eta) d\eta + \int_t^{t+s} \left\{ t(-\eta + \frac{t}{2} + s) + \frac{(\eta-s)^2}{2} \right\} R(\eta) d\eta \right] \quad (10)$$

(10)式において、 $(t-s)$ がきわめて大きいとき、右辺の2, 3項は1項に比し無視できるから、

$$D_p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_p(t) = \overline{V}^2 \int_0^{\infty} R(\eta) d\eta = D(\infty) \quad (11)$$

となる。すなわち、 t がきわめて大きい場合、拡散係数は粒径に依存しないことになる。

一方、(7)式において、 $s=0$ とみると、 $\overline{V}_p^2$ が計算される。すなわち、

$$\overline{V}_p^2 = \frac{\overline{V}^2}{s^2} \left\{ \int_{-s}^0 (\eta+s) R(\eta) d\eta + \int_0^s (-\eta+s) R(\eta) d\eta \right\} = \frac{2\overline{V}^2}{s^2} \int_0^s (-\eta+s) R(\eta) d\eta \quad (12)$$

いま、 $R(t)$ として、つきの関数形、すなわち、

$$R(t) = 1 - \frac{t^2}{\lambda_t^2}, \quad \text{for small } t, \quad (13.1) \quad R(t) = e^{-t/t_*}, \quad \text{for large } t \quad (13.2)$$

を用いると、 $\overline{V}_p^2$ はつきのようになる。

$$\frac{\overline{V}_p^2}{\overline{V}^2} = 1 - \frac{s^2}{6\lambda_t^2}, \quad \text{for small } t \quad (14.1) \quad \frac{\overline{V}_p^2}{\overline{V}^2} = \frac{2t_*^2}{s^2} \left(\frac{s}{t_*} + e^{-s/t_*} - 1 \right) \quad \text{for large } t \quad (14.2)$$

(11)式および(14)式より、粒子拡散における拡散係数は、粒径が増大するにつれて減少するが、 s が増加するにしたがって、流体粒子拡散における値に近づくことがわかる。したがって、fig. 5と同様の方法によって、拡散係数を特性づけるためには、粒子拡散の場合には特性時間として、次式によって定義される t_{*p} を用いねばならない。

$$\overline{V}_p^2 t_{*p} = \overline{V}^2 t_* \quad (15)$$

fig. 5は、以上の結果の一例として、 s/t_* と $\overline{V}_p^2/\overline{V}^2$, t_{*p}/t_* の関係を示したものである。また fig. 6は、 s/t_* を parameter として、拡散係数と流下時間との関係を示したものである。

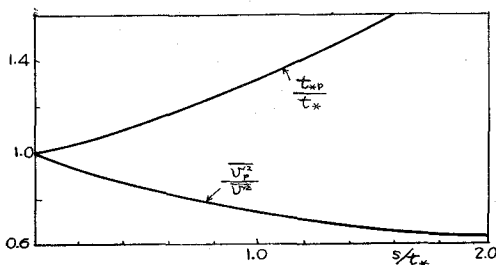


Fig. 5

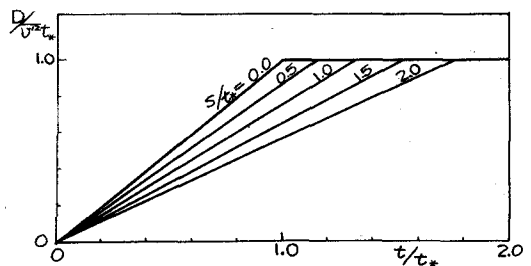


Fig. 6

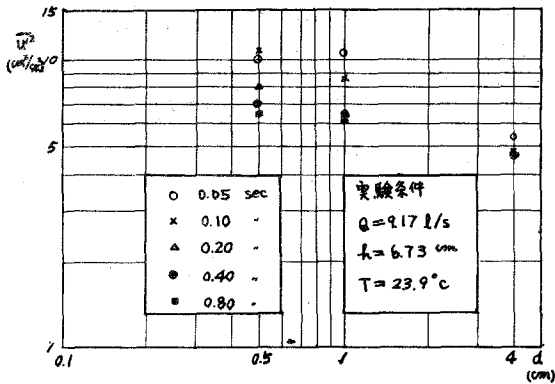


Fig. 7

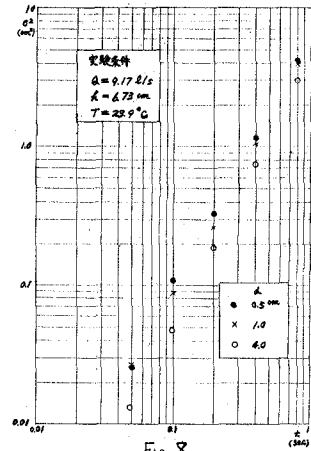


Fig. 8

2. 実験結果および考察

fig. 7は、自由表面上に浮遊した固体粒子の乱れの強さ（主流方向）と、粒径との関係を示したものである。これから、固体粒子の乱れの強さは、粒径の増大とともに減少することが見られる。これは1で述べた理論的結果と定性的に一致するが、(14.1)式あるいは(14.2)式には精度上測定困難な λ あるいは λ_* が含まれているので、现阶段では、両式の適合について断言することはできない。

fig. 8は、固体粒子の分散と流下時間との関係を示したものである。粒径が増すにしたがって、分散が小さく現われているが、これは、先に述べた粒径の増加とともに拡散係数が減少することと対応している。fig. 8において、各粒径について、測定値は、ほぼこの図2の直線上にあることから、拡散の初期の段階にあって、 $\tau < \tau_*$ であると考えられる。

参考文献

- 1) 井上栄一, "地表風の構造" 農業技術研究所報告, A.オ2号, (昭和27年).
- 2) 岩佐義朗, 今井博健, "雨水路流れにおける拡散過程について(オキ報)", 土木学会関西支部第24回学術講演会講演概要, (昭和39年).
- 3) Taylor, G. I., "Diffusion by continuous movements", Proc. London Math. Soc., vol. 20, (1921)
- 4) Einstein, A., "Über die von der Molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann. Physik, 17, (1905)
- 5) Iwasa, Y. and H. Imamoto, "Some features of turbulent diffusive process in open channel flow", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., vol 28 part 1 (1966)