

波状水路における流れ

京都大学工学部 正員 岩佐義朝

これは、波形管ならびに波状水路の流れについて過去数年間MITで行なわれ、また今後 University of Iowa で行なわれる実験の理論的説明をするための一次元解析法による解析のうち波状水路のそれについて述べたものである。

この種の解析には、古典流体力学的方法による Lamb, Milne-Thomson, Kennedy および Reynolds の研究、一次元解析法による Boussinesq, Massé, 岩佐, Englund and Hansen, Exner, Reynolds のもの、また境界層理論を適用した Motzfeld, Miles, Brooke-Benjamin のものがある。ここでは、研究対象がいわゆる水理学の領域に限られることから、一次元解析法を適用した取り扱いを行なう。

いま、エネルギー解析を用い、エネルギー係数、圧力分布係数を一定とすると、その基本式は

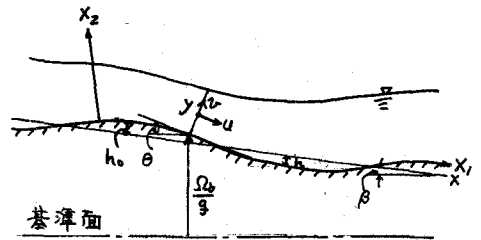
$$Q = uy = \text{const.}$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos \theta + \frac{Q^2}{gy^3} \left\{ -\alpha_1 + \alpha_2 \left[y \frac{d^2y}{dx_1^2} - \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 \right] \right.$$

$$+ \lambda_1 ky - \lambda_2 \left[3y \frac{d^2y}{dx_1^2} - 2 \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 \right] - \lambda_3 \left[\right.$$

$$\left. 2ky^2 \frac{d^2y}{dx_1^2} - ky \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 + y^2 \frac{dy}{dx_1} \frac{dk}{dx_1} + y^3 \frac{d^2k}{dx_1^2} \right] \left. \right\}$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + ky) \sin \theta - \frac{fQ^2}{8gy^3} + \frac{Q^2}{gy^3} \left\{ \lambda_1 y^2 \frac{dk}{dx_1} - \lambda_2 y^2 \frac{d^3y}{dx_1^3} + \lambda_3 y^3 \frac{d^2y}{dx_1^2} \frac{dk}{dx_1} \right\}$$



である。ここに、 α_1 : 従来より用いられる一方向流のエネルギー係数、 α_2 : 運動エネルギーフラックスに対する x_2 方向成分によるもの、 λ_1 : 遠心力として表わされる圧力分布係数、 λ_2, λ_3 : x_2 方向の加速度と水路底の曲率による分布係数、 k : 水路底の曲率である。

水路底をこれと直角上向き両方向に代表長をとり、上式のオーダーと比較すると波状水路の波高と波長との比、すなわち steepness によって上式は種々の近似式がえられ、0次は一樣水路における等流、1次は水路底の変わる漸変流、2次は水路底の曲りによる効果を導入した流れ、3次は鉛直加速度を含む流れ、4次はそれらのすべてが関係した水面勾配の大きいものに相当することが示される。

(1) 波状水路の流れの線型解

波状水路が正弦的であり、その steepness がきわめて小さいと、水路の幾何学的形状は $x_1 \rightarrow x$, $\sin \theta \rightarrow \sin \beta = \cos \rho (dh/dx)$, $\cos \theta \rightarrow \cos \rho$, $k \rightarrow -\cos \rho (d^2h/dx^2)$ によって近似される。ここに、 h は水路底の波状の平均値である。この場合、何らかの平

約水深 Y_0 に対する水面の振動は線型化した条件のもとでけつぎのように示される。

近似度	線型化方程式	位相差 (rad)	振幅比 (Y_0/h_0)
1 次 ($\frac{Y_0}{L}$) ² < 1	$(\alpha_1 F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + P\eta_1 = R \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{d\delta}{d\sigma}$	$\frac{f_0 \mu F_0^2 (F_0^2 - \frac{\mu^2 - 3}{\alpha_1 \mu^2})}{8 (F_0^2 - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{3f_0^2 F_0^4}{64 \alpha_1})}$	$\frac{\mu \sqrt{1 + \frac{f_0^2 \mu^2}{64} F_0^4}}{\sqrt{\alpha_1^2 \mu^2 (F_0^2 - \frac{1}{\alpha_1})^2 + \frac{9f_0^2 F_0^4}{64}}}$
2 次 ($\frac{Y_0}{L}$) ³ < 1	$(\alpha_1 F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + P\eta_1 = R \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{d\delta}{d\sigma} + \lambda_1 F_0^2 \cos\beta \frac{d^3\delta}{d\sigma^3}$	$\frac{-f_0 F_0^2 (3\lambda_1 - \alpha_1) [F_0^2 + \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 (3\lambda_1 - \alpha_1)}]}{-8 \alpha_1 \lambda_1 \mu [(F_0^2 - \frac{1}{\alpha_1})(F_0^2 - \frac{1}{\lambda_1 \mu^2}) + \frac{3f_0^2 F_0^4}{64 \alpha_1 \lambda_1 \mu^2}]}$	$\frac{\mu \sqrt{\lambda_1^2 \mu^4 (F_0^2 - \frac{1}{\lambda_1 \mu^2})^2 + \frac{\mu^2 f_0^2 F_0^4}{64}}}{\sqrt{\alpha_1^2 \mu^2 (F_0^2 - \frac{1}{\alpha_1})^2 + \frac{9f_0^2 F_0^4}{64}}}$
3 次 ($\frac{Y_0}{L}$) ⁴ < 1	$(\alpha_1 F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + P\eta_1 - \lambda_2 F_0^2 \frac{d^3\eta_1}{d\sigma^3} = R \frac{d^2\delta}{d\sigma^2} + \frac{d\delta}{d\sigma} + \lambda_1 F_0^2 \cos\beta \frac{d^3\delta}{d\sigma^3}$	$\frac{\frac{f_0 F_0^2}{8} \{ 3 + \mu^2 [(\alpha_1 - 3\alpha_1) F_0^2 - 1] + \lambda_2 \mu^4 F_0^3 \}}{-\mu \{ [(\alpha_1 + \lambda_2 \mu^2) F_0^2 - 1] [\lambda_1 \mu^2 F_0^2 - 1] + \frac{3f_0^2 F_0^4}{64} \}}$	$\frac{\mu \sqrt{\lambda_1^2 \mu^4 (F_0^2 - \frac{1}{\lambda_1 \mu^2})^2 + \frac{\mu^2 f_0^2 F_0^4}{64}}}{\sqrt{\mu^2 [(\alpha_1 + \lambda_2 \mu^2) F_0^2 - 1]^2 + \frac{9f_0^2 F_0^4}{64}}}$
Boussinesq	$(\alpha_1 F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + \frac{3}{8} c f_0 F_0^2 \eta_1 - \lambda_2 F_0^2 \frac{d^3\eta_1}{d\sigma^3} = \alpha_1 F_0^2 \frac{d\delta}{d\sigma} + \frac{F_0^2}{8} \frac{d^3\delta}{d\sigma^3} + \frac{3}{8} c f_0 F_0^2 \delta$ $c \approx 1.1$	$\frac{4\mu (2 - \mu^2 F_0^2)}{3cf_0 \{ F_0^2 + \frac{32\mu^2}{81c^2 f_0^2} [F_0^2 (18\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \mu^2 - \mu^4) - 18\alpha_1 + 3\mu^2] \}}$	$\frac{\sqrt{1 + \frac{16}{81c^2 f_0^2} \mu^2 (6\alpha_1 - \mu^2)^2}}{\sqrt{1 + \frac{64\mu^2}{81c^2 f_0^2 F_0^4} [(3\alpha_1 + \mu^2) F_0^2 - 3]^2}}$
Engelund and Hansen	$(\alpha_1 F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + \frac{3}{8} f_0 F_0^2 \eta_1 - (\lambda_2 + 0.072 \sqrt{\frac{f_0}{8}}) F_0^2 \frac{d^3\eta_1}{d\sigma^3} = \frac{d\delta}{d\sigma} + \lambda_1 F_0^2 \frac{d^3\delta}{d\sigma^3}$	$\frac{3f_0 F_0}{8\mu [(1 + A\mu^2) F_0^2 - 1]}$ $A = \frac{1}{3} + 0.072 \sqrt{\frac{f_0}{8}}$	$\frac{\frac{\mu^2 F_0^2}{2} - 1}{\sqrt{[(1 + A\mu^2) F_0^2 - 1]^2 + \frac{9f_0^2 F_0^4}{64\mu^2}}}$
Potential Flow		$\phi = \begin{matrix} \pi & F_0 < 1 \\ 0 & > 1 \end{matrix}$	$\frac{\mu^2 F_0^2 (\cosh \mu - 1) + \sinh \mu}{\mu F_0^2 \cosh \mu - \sinh \mu}$

$\sigma = t$, $\eta_1 = y_1/Y_0$, $\sigma = x/Y_0$, $\delta = h/Y_0$, $P = (f_0 F_0^2/8) [3 - (Y_0/f_0)(\pi f_0/Y_0)]$, $R = f_0 F_0^2 \cos\beta/8$, $\mu = 2\pi Y_0/L$, L : 波長

この解は 1 次において Potential Flow の解に近く、3 次では Boussinesq や Engelund および Hansen のそれと類似している。詳細図は当日示す。

(2) 波状水路の流れの非線型解

線型解によつて水路底と自由表面との位相差や振幅比は解析されるが、その最大の欠陥は線型化によつて実際にはしばみられる波状水路上の流れにあらわれる跳水を示すことができないことである。これは非線型解によつて示される。計算によれば、1 次よりも 2 次で大略現象が説明される。ただし、計算は IBM-1620 および 7090 によつたため、詳細には計算した定性的性格の解析にとどまつてゐる。当日その図を紹介する。