

円形立坑周辺の応力状態

神戸大学工学部 正員 桜井 春 輔

1. はしがき トンネル周辺の応力分布を把握することは、地山材料の力学的性質が複雑なため非常に困難であり、たとえ水平な表面を有する地盤内に掘られた円形立坑ですらその解は複雑である、円形立坑のまわりの応力分布に関しては、地盤が弾塑性挙動を示すものと仮定したいくつかの研究^①が発表されているが、結局は地山材料の降伏条件式の取扱いが問題になると思われる。ここにおいては岩石に対する降伏条件式を用い地盤内の円形立坑周辺の弾塑性応力状態の解析を行う。岩石は明らかに脆性材料であるが、その拘束応力を増加させることにより、あたかも延性材料のような挙動を示すことはすでによく知られている。筆者が岩塩に対して行った三軸圧縮試験の結果も材料は拘束応力の関数として脆性から延性への変化を示している。

なおこの問題の解析にあたっては、次の仮定を用いる。(1)平面歪め、(2)微小変位、(3)ソ性領域における Lévy-Mises の式、(4)岩石に対する理想化された降伏条件式、(5)水平な表面から等しい深さの奥における鉛直応力は一定、(6)主応力方向は円筒座標 (r, θ, z) の方向と一致する。

2. 降伏条件式 実験結果を考慮すれば、岩石に対する降伏条件式は Nadai^② が示しているような Octahedral Shearing Stress が Mean Stress の既知関数になったときに降伏する部分 (図-1 において、Yielded Region と呼んでいる部分) と Mises の降伏条件式、すなわち、Octahedral Shearing Stress が Mean Stress に関係なく常に一定である部分 (図-1 において Plastic Region と呼んでいる部分) とに分けられるようである。

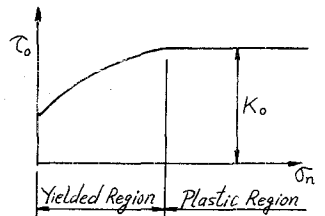


図-1

3. Elastic Region における応力分布 材料が弾性状態を示す領域において、地面より z の深さの応力は厚肉円筒に関する理論式を適用し、Plastic Region との連続条件を考慮して次のように求める。

$$\sigma_r = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \sigma_c, \quad \sigma_\theta = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \sigma_c, \quad \sigma_z = p_z \quad (1)$$

ここに σ_c は立坑を掘る以前の、地面より z の深さの水平応力、 p は立坑中心より Elastic Region と Plastic Region との境界までの距離、 γ は地山材料の密度を表わす。また γ は次式によって計算される定数である。

$$\gamma = \sqrt{6K_0^2 - \frac{4}{3}\sigma_c^{*2}} \quad (2)$$

ここに K_0 は Yielding Octahedral Shearing Stress で材料によって定まる定数であり、 σ_c^* は $\sigma_z^* = p_z - \sigma_c$ によって計算される。

4. Plastic Region における応力分布 歪みの増分 $d\epsilon_{ij}$ は、弾性歪みの部 $d\epsilon_{ij}^e$ と、ソ性歪みの部 $d\epsilon_{ij}^p$ との和として、

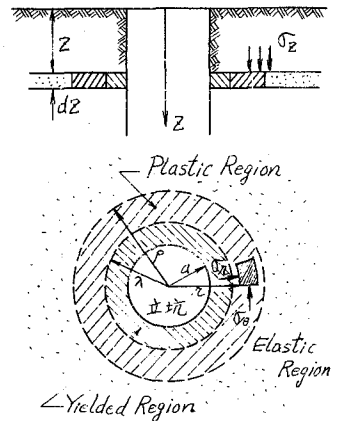


図-2

$dE_{ij} = dE_{ij}^e + dE_{ij}^p$ によって表わされる。塑性偏歪率増分は Lévy-Mises の式により、 $dE_{ij}^p = (d\lambda) S_{ij}$ として表わされる。ここに $(d\lambda)$ は比例定数である。今、円形立坑の軸に關して平面歪み状態、すなわち $dE_z = 0$ を仮定する。この条件を満足させるためには応力相互間にある関係が一義的に求まるはずである。しかし簡単のため $dE_z^p = 0$ より得られる $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ による補正を行うことにより近似的に $dE_z = 0$ を満足させることにする。すなわち Plastic Region においては、

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2 + \sigma_z^{**} \quad (3)$$

を仮定する。ここに σ_z^{**} は補正のための定数である。

Plastic Region における応力分布は、先に述べた Mises の降伏条件式を考慮すれば静定問題として釣合方程式のみから Elastic Region との連続条件を用いて解くことができる。その計算結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Y^* \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{Y}{2} + \sigma_z \\ \sigma_\theta &= Y^* \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{Y}{2} + \sigma_z + Y^* \\ \sigma_z &= Y^* \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{Y}{2} + \sigma_z + \frac{Y^*}{2} + \sigma_z^{**} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 Y^* は次式によって計算される定数である。

$$Y^* = \sqrt{6K_0^2 - \frac{4}{3}\sigma_z^{**2}} \quad (5)$$

5. Yielded Region における応力分布 Yielded Region においても (3) 式が成立すると仮定する。今、図-1 に示す降伏条件式を図-3 に示すように座標軸の変換を行い Yielded Region の曲線を図に示すように直線で近似すると半径方向の応力 σ_r と接線方向の応力 σ_θ との間に次の関係を得る。

$$\sigma_\theta = K_1 \sigma_r + K_2 \quad (6)$$

ここに K_1 および K_2 は地山材料によって定まる定数である。

すなわち、 $K_1 = (1 + \tan\phi)/(1 - \tan\phi)$, $K_2 = 2\beta/(1 - \tan\phi)$ (7)

Yielded Region における応力分布は釣合方程式と (6) 式に示す降伏条件式を用いてやはり静定問題として変位を考慮することなく次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\beta}{\tan\phi} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n - 1 \right\}, \quad \sigma_\theta = \frac{\beta(1 + \tan\phi)}{\tan\phi(1 - \tan\phi)} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n - 1 \right\} + \frac{2\beta}{1 - \tan\phi} \\ \sigma_z &= \frac{\beta}{\tan\phi(1 - \tan\phi)} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n - 1 \right\} + \frac{\beta}{1 - \tan\phi} + \sigma_z^{**} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Yielded Region と Plastic Region の境界 λ は立坑内壁の境界条件より、2. Plastic Region と Elastic Region との境界 P は、その境界における連続条件より求まる。補正定数としての σ_z^{**} は、 σ_r と σ_θ の最終結果に大きな影響を与えない。

(1), (4), (8) 式を図示したのが、図-4 である。

参考文献

- ① 川本眺男：土木学会論文集，59号，昭33.11，P1 など。
- ② A. Nadai：Theory of Flow and Fracture of Solids, vol.1, 1950.
- ③ R. Hill：The Mathematical Theory of Plasticity, 1950.

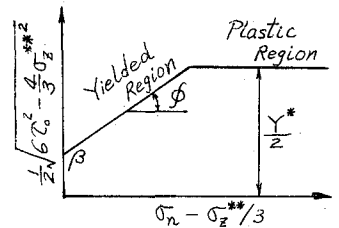


図-3

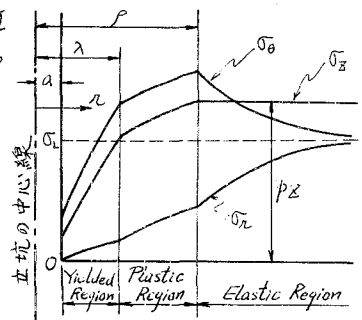


図-4