脆性材料の破壊条件に関する二三の考察

京都大学　正員　工博　丹羽　義次
京都大学　正員　工修 ○小林　昭一

1. はじめに

本研究は，脆性材料に関して現在までに提案されている代表的な破壊説の物理的意味を，微視的な立場から再検討し，それを基に一般的な破壊条件を提案したものである。

2. 巨視的破壊説と微視的破壊説

2.1. 巨視的破壊説；Mohr の条件式，八面体剪断応力説，Tresca の条件等.

例，Mohr-Coulomb 式；$|\tau| = -\mu\sigma + t_0$，或いは $\sigma_3 = \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\mu}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu}\sigma_1 - \frac{2t_0}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu}$ ，(1)，(1)′

Mohr の二次式；$\tau^2 = -\alpha\sigma + t_1$，或いは $(\sigma_1-\sigma_3)^2 + 2\alpha(\sigma_1+\sigma_3) = 4t_1 - \alpha^2$ ，(2)，(2)′

σ；直応力，τ；剪断応力，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$；主応力，$\mu, \alpha, t_0, t_1$；材料定数

2.2. 微視的破壊説；Griffith 説，修正 Griffith 説等.

a). Griffith の概念に基づく引張強度

$$K_0 = \sqrt{\frac{2TE}{\pi l}} \text{（平面応力）}, \quad \sqrt{\frac{2TE}{\pi l(1-\nu^2)}} \text{（平面歪）}^{1)}, \quad K_1 = \sqrt{\frac{\pi TE}{2c(1-\nu^2)}} \text{（三次元）}^{2)},$$

T；単位面積当りの表面エネルギー，E；弾性係数，ν；ポアソン比

l；偏平楕円クラックの長半径，c；偏平円形クラックの半径

b). Griffith の破壊条件（二次元）[3]

i) $3\sigma_1 + \sigma_3 \geq 0$ ，$\sigma_1 = K$ ，$\theta = 0$ (3a)

ii) $3\sigma_1 + \sigma_3 \leq 0$ ，$(\sigma_1-\sigma_3)^2 + 8K(\sigma_1+\sigma_3) = 0$ ，$\theta = \cos^{-1}\{(\sigma_3-\sigma_1)/2(\sigma_1+\sigma_3)\}/2$ (3b)

K；一軸引張強度，θ；σ_3の方向から計った最も危険なクラック長軸の傾き

一軸圧縮の場合には，$\sigma_1 = 0$，$\sigma_3 = -8K$，$\theta = 30°$ となる。

c). 修正 Griffith 条件；偏平楕円クラックの閉鎖を考慮して修正すると次式を得る。[4]

$$\mu(\sigma_1+\sigma_3) + (\sigma_1-\sigma_3)\sqrt{1+\mu^2} = 4K \quad , \mu\text{；摩擦係数} \qquad (4)$$

この式の適用範囲は，大体圧縮域と考えてよい。引張域には Griffith 式を用いる。

2.3. 巨視的破壊説と微視的破壊説との関係

Griffith 式(3)と Mohr の二次式（式(2)において $t_1 = 4K^2$，$\alpha = 4K$ と置いたもの）との等価性は Murrell[5] が証明している。この場合，放物線の頂点は式(3a)を，他の部分は式(3b)を表わす。また，式(4)を書き改め，$t_0 = 2K$ とすると直ちに式(1)を得る。[6] このように，巨視的破壊説の根拠は微視的解釈に求められる。しかしながら，微視的破壊説は微小クラックから亀裂が発生するための必要十分条件を与えるだけであり，その後に続く複雑な伝播過程を経た後に到達する巨視的な破壊(崩壊)条件とは必ずしも一致しないことに注意しなければならない。

3. 三次元応力空間内に表わした破壊条件

3.1. 破壊曲面；三主応力(歪)をそれぞれ直交直線座標軸に選ぶと，破壊時応力(歪)状態を表わす点の集合は，この空間内に一つの曲面(破壊曲面)を形成する。Drucker[7] の物質の安定性の解釈に基づいて，この曲面は凸曲面でなければならないことが分る。

今，破壊は応力状態だけに関係するものと仮定し，更に，材料は巨視的に等方・均質と仮定する．これにより，破壊曲面は，静水圧線（$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$）を軸とし，主応力相互間に互換性のあるような凸曲面で表わせる．従って，Rendulic 面（一つの主応力軸と静水圧線を含む平面），および直截面（静水圧線に垂直な平面，$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=$一定）による破壊曲面の切口曲線を求めれば，破壊曲面の全容を知ることができる．

座標変換；$\sigma_1=-\frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_1'-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2'+\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'$，$\sigma_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1'+\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'$，$\sigma_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2'+\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3'$ (5)

条件　$\sigma_2'\leq 0$　および　$\sqrt{3}|\sigma_1'|\leq -\sigma_2'$ (6)

を行うと，Rendulic 面上の切口曲線は（σ_1'，σ_3'）平面上に，また，直截面上の切口曲線の π 面（$I_1=0$ の平面）上への投影は（σ_1'，σ_2'）平面上に表わせる．静水圧線から直截面上の切口曲線上の一点までの距離 r，およびその σ_2' から σ_1' 方向への傾き θ はそれぞれ

$$r=\sqrt{\sigma_1'^2+\sigma_2'^2}=\sqrt{3}\,\tau_{oct}=\sqrt{\tfrac{2}{3}(I_1^2-3I_2)},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\right)=\tan^{-1}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}\right] \qquad (7),(8)$$

となる．I_1，I_2 はそれぞれ応力の第一および第二基本不変量である．

今，三軸応力状態にある物体を考えると，二次元 Griffith の概念を三次元に拡張した Sack の解析[2]の示すように，最も危険な微小クラックは，中間主応力方向に平行な面内に存在する偏平円形ないし針状クラックであり，従って，破壊は最大および最小主応力のみの組み合せによって，中間主応力方向に平行な面内に生じ，殆んど中間主応力の影響を受けないと考えられる．この基本概念に基づいて，座標変換式(5)を用いて，二次元破壊説を三次元応力空間に拡張しよう．

a). Mohr-Coulomb 式；π 面上；$\sigma_2'=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot\sigma_1'+\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\sigma_3'-\sqrt{2(1+\mu^2)}\,t_0$，$|\theta|\leq 30°$，$\sigma_2'\leq 0$ (9)

Rendulic 面上；comp. test；$\sigma_1'\geq 0$，$(3\sqrt{1+\mu^2}-\mu)\sigma_1'+\sqrt{2}\mu\sigma_3'=\sqrt{6}(1+\mu^2)t_0$ (10a)

extens. test；$\sigma_1'\leq 0$，$-(3\sqrt{1+\mu^2}+\mu)\sigma_1'+\sqrt{2}\mu\sigma_3'=\sqrt{6}(1+\mu^2)t_0$ (10b)

パラメーター m（$0\leq m\leq 1$）を用いて　$\sigma_2=\sigma_3+m(\sigma_1-\sigma_3)$ と表わし，I_1 と r_m との関係および θ を求めると

$$I_1=\frac{t_0}{\mu}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3\sqrt{1+\mu^2}+\mu(1-2m)}{\sqrt{1-m+m^2}}\cdot\frac{r_m}{\mu},\qquad \theta=\tan^{-1}\left[\frac{1-2m}{\sqrt{3}}\right] \qquad (11),(12)$$

となる．comp. test（$m=1$）および extens. test（$m=0$）に対する r_m を，それぞれ r_1 および r_0 とすると　$r_1/r_0=\frac{3\sqrt{1+\mu^2}+\mu}{3\sqrt{1+\mu^2}-\mu}$ を得る．　$\mu=1$ とすれば $r_1/r_0\doteqdot 1.645$，$\mu=0$ とすれば $r_1/r_0=1$，$\mu=\infty$ とすれば $r_1/r_0=2$ となる．

b) Mohr の 2 次式；π 面上；$\sigma_1'=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_2'^2+\sqrt{2}\sigma_3'+\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{3}{2}}(\alpha^2-4t_1)$，$|\theta|\leq 30°$ (13)

Rendulic 面上；comp. test；$\sigma_1'\geq 0$，$\sigma_3'=-\frac{3\sqrt{3}}{2\alpha}\sigma_1'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1'-\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}(\alpha^2-4t_1)$ (14a)

extens. test；$\sigma_1'\leq 0$，　　〃 (14b)

$$I_1=-\frac{3}{8}\cdot\frac{r_m^2}{\alpha(1-m+m^2)}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}r_m+\left(\frac{t_1}{\alpha}-\frac{\alpha}{4}\right),\quad r_1=r_0+2\sqrt{6}\,\alpha/9\doteqdot r_0+0.544\alpha \qquad (15),(16)$$

c) Griffith 式；π 面上；$2\sqrt{6}\sigma_1'+3\sqrt{2}\sigma_2'\leq 4I_1$，$\sigma_1'+\sqrt{3}\sigma_2'=\sqrt{2}\sigma_3'-\sqrt{6}K$ (17a)

$2\sqrt{6}\sigma_1'+3\sqrt{2}\sigma_2'\geq 4I_1$，$\sigma_1'=\frac{1}{4K}\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_2'^2+\sqrt{2}\sigma_3'$ (17b)

Rendulic 面上；comp. test，$\sigma_1'+2\sqrt{2}\sigma_3'\geq 0$，$2\sigma_1'+\sqrt{2}\sigma_3'=\sqrt{6}K$；$\sigma_1'+2\sqrt{2}\sigma_3'\leq 0$，$\sigma_1'\leq 0$，$\sigma_3'=-\frac{3\sqrt{3}}{8K}\sigma_1'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1'$ (18)

extens. test，$5\sqrt{2}\sigma_1'-4\sigma_3'\geq 0$，$-4\sigma_1'+\sqrt{2}\sigma_3'=\sqrt{6}K$；$5\sqrt{2}\sigma_1'-4\sigma_3'\leq 0$，$\sigma_1'\geq 0$，$\sigma_3'=-\frac{3\sqrt{3}}{8K}\sigma_1'^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1'$ (19)

平面（14a）および曲面（14b）は，$\sigma_2'=-2\sqrt{2}K$ で接続し，この線上で両者は共通接平面を有する．　式（14a），（14b）に対応して，

$$r_m=\frac{1}{\cos(\theta+30°)}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}I_1-\sqrt{\frac{3}{2}}K\right),\quad r_1/r_0=2;\quad I_1=-\frac{3}{32}\cdot\frac{r_m^2}{K(1-m+m^2)}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{1-2m}{\sqrt{1-m+m^2}}r_m,\quad r_1=r_0+8\sqrt{6}K/9$$

を得る．なお，修正 Griffith 式は，引張域に対しては Griffith 式と，また，圧縮域に対しては Mohr-Coulomb 式と本質的な差異はないので省略する．

3.2. 等方均質脆性材料の破壊条件；以上の考察に基づいて，次のような破壊条件が求められる．この条件は，三次元応力空間内に静水圧線を軸とし，主応力軸の間に互換性を有するような凸曲面で表わされ，次のように滑らかに接続する二種の面から成っている．一つは，Max.（σ_1，σ_2，σ_3）$=K$（一軸引張強さ）で表わされる三組の平面から成り，その直截面の形は正三角形状である．他の一つは，静水圧の増加に伴ってほぼ等方的に膨脹するような曲面で，その直截面の形は正三角形よりやや膨らんだものである．全体的には，拡張した Griffith の条件に比して，静水圧の増加とともに速やかに膨脹する曲面を考えなければならないであろう．Rendulic 面上の切口曲線は，近似的には放物線か或いは直線に近くなると考えられる．

1). Griffith, A.A; Phil. Trans. Roy. Soc. A221, 163–198；2) Sack, R.A., Proc. Phys. Soc. London, 58, 729–736；3) Griffith, A.A., Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. (Delft), 55–63；4) McClintock, F.A. & J.B. Walsh, 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1015–1021；5) Murrell, S.A.F., "Mechanical properties of Non-metallic Materials", ed. W.H. Walton (1958), Butterworths；6) Brace, W.F., J. Geophys. Res. 65, 3477–3480；7) 例えば，Drucker, D.C., "Structural Mechanics" ed. J.N. Goodier & N.J. Hoff, Pergamon, 407–455.