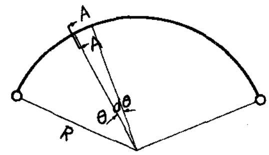
円弧アーチリブのねじれ振動に関する基礎的研究

京都大学工学部 ○ 白 石 成 人
京都大学大学院 小 国 俊 樹

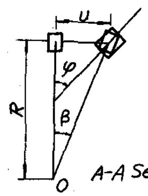
1 まえがき

アーチ構造物は,これまで数多くの橋梁,建築物の一部として作られてきており,これに関する文献も多い。しかしその大多数はアーチ構造物の静的な解析法に関するもので,最近の研究成果としては,S.O. Asplund,[1] Fok & Au[2], Miklofsky & Sotillo[3] 等によるものがある。これに対して,アーチリブの振動解析の文献は比較的少く,Waltking[4], 村上[5] らのものがある以外,R.R. Bradshow[6]のアーチリブの空気力学的挙動に関する報告が見受けられる程度で,特にそのねじれ変形を対象とした振動解析はほとんど皆無に近い状態である。そこで,アーチリブの面外変形ならびにねじれ変形振動について,2,3の基礎的な考察を行ったのでその結果を報告する。

2. 基礎方程式



円弧アーチを対象とするとき,その変形状態は,微小変形では大別して,アーチ面内変形と面外変形に分けられ,これらは独立な変形状態と考えられる。したがって,アーチリブのねじれ変形は後者の面外変形となる。面外変形状態は右図に示すように,アーチ軸線の一断面について,アーチ面のヒンジ中心軸まわりの変位 $u=R\beta$ とねじれ角 φ によって与えられる。[7] アーチリブにおいては一般に軸力を考慮しなければならないが,対象を自由振動に限定すれば,軸力の影響は高次微小量となる。しかしながら,曲げ剛性の大きな断面を用いる場合,軸力の影響,すなわちアーチ軸線の接線方向の変位を考慮する必要がある。[4),5)] また,ねじれ変形はせん断中心まわりの回転角を考慮する必要がある。いま,断面中立軸からせん断中心までの距離を y_0,アーチ軸線の半径を R とするとき,$y_0/R \ll 1$,ならば,せん断中心と断面中心とのずれの影響は無視しうる。これらより,以下の解析においてアーチ軸線の接線方向の変位を無視し,またせん断中心と断面中心とのずれを無視すれば,面外変位による曲率 ρ_R,ねじれ率 ρ_θ はそれぞれ



A-A Section

$$\rho_R = \frac{1}{R}\left(\frac{d^2\beta}{d\theta^2} + \varphi\right), \qquad \rho_\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\beta}{d\theta}\right)$$

となる。したがって,ねじれ変形を考慮した場合のひずみエネルギーは次のようになる。

$$U = \frac{1}{2R}\int_L EI_y\left(\frac{d^2\beta}{d\theta^2} + \varphi\right)^2 d\theta + \frac{1}{2R}\int_L GK\left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\beta}{d\theta}\right)^2 d\theta + \frac{1}{2R^3}\int_L EC_w\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\beta}{d\theta^2}\right)^2 d\theta \qquad (1)$$

ここに,EI_y は曲げ剛性,GK はねじれ剛性,EC_w は曲げねじれ剛性である。

一方,系の全運動エネルギーは,単位体積質量を γ,断面積を A,回転二次モーメント

をI_pとすれば次式のようになる。

$$T = \frac{1}{2}\int_L \gamma A R^3 \dot{\beta}^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_L \gamma I_p R \dot{\varphi}^2 d\theta \tag{2}$$

式(1),(2)よりEulerの方程式を導けば，円弧アーチ・リブのねじれ振動の基礎方程式として，次のような式(3),(4)をうることができる。

$$\frac{EI_y}{R}\beta'''' + \frac{EC_w}{R^3}\beta'''''' - \frac{GK}{R}\beta'' + \gamma A R^3 \ddot{\beta} - \frac{EC_w}{R^3}\varphi'''' + \frac{EI_y}{R}\varphi'' + \frac{GK}{R}\varphi'' = 0 \tag{3}$$

$$\frac{EC_w}{R^3}\varphi'''' - \frac{GK}{R}\varphi'' + \frac{EI_y}{R}\varphi + \gamma I_p R \ddot{\varphi} - \frac{EC_w}{R^3}\beta'''' + \left(\frac{GK}{R} + \frac{EI_y}{R}\right)\beta'' = 0 \tag{4}$$

上式に対する境界条件としては次の4つの条件式が求められる。すなわち，

(i) $\beta = 0$ または $-EI_y(\beta'' + \varphi)' - GK(\varphi' - \beta') + \frac{EC_w}{R^2}(\varphi'' - \beta'')' = 0$

(ii) $\beta' = 0$ または $-EI_y(\beta'' + \varphi) - \frac{EC_w}{R^2}(\varphi'' - \beta'') = 0$

(iii) $\varphi = 0$ または $\frac{GK}{R}(\varphi' - \beta') - \frac{EC_w}{R^3}(\varphi'' - \beta'') = 0$

(iv) $\varphi' = 0$ または $-\frac{EC_w}{R^2}(\varphi'' - \beta'') = 0$

である。これらより

$$\left.\begin{array}{ll} \text{単純支持条件}: & \beta = 0,\ \beta'' = 0,\ \varphi = 0,\ \varphi'' = 0 \\ \text{固定支持条件}: & \beta = 0,\ \beta' = 0,\ \varphi = 0,\ \varphi' = 0 \\ \text{自由支持条件}: & \beta''' + \beta' = 0,\ \varphi'' + \varphi = 0,\ \beta' = \varphi',\ \beta'' = \varphi'' \end{array}\right\} \tag{5}$$

が求められる。

式(3),(4),(5)を境界値問題として解けば，円弧アーチ・リブのねじれ振動を解析することができるが，数値計算例ならびに模型実験結果については当日報告する。

3. あとがき

この研究は，大阪府高潮課における防潮水門に対する研究の一環として行われており，未だ研究途上にある。関係者の御援助に対してここに感謝の意を表するものである。

参考文献

(1) S. O. Asplund : Proc. ASCE, Vol. 87, ST 7 p. 125, 1961
(2) T. D. Y. Fok & T. Au : Proc. ASCE, Vol. 87, ST5 1958, Paper 1758
(3) H. A. Miklofsky & O. J. Sotillo : Proc. ASCE, Vol. 83, ST2, 1957, Paper 1190
(4) F. W. Waltking : Ing. Archiv. S. 429, 1934
(5) 村上永一 : 内務省土木試験所，昭18. 第69号
(6) R. R. Bradshow : Proc. ASCE, Vol. 90, No. ST. 3, 1964, p. 1〜17
(7) 深沢泰晴 : 土木学会論文集，Vol. 96, p. 29〜47, 昭38.