

弾性地盤上にある箱型構造の立体解析

大阪工業大学

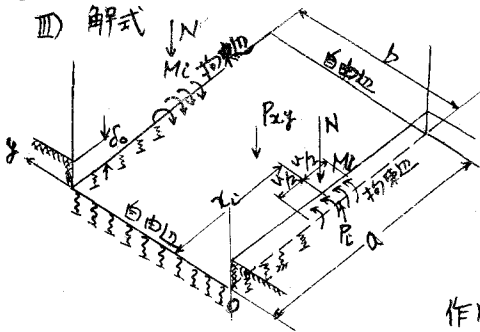
正員 ○岡村宏一

大阪設計コンサルタントK 正員 吉田公憲

I) まえがき: 弾性基礎にある部材をもつ構造の解析はラーメン, 格子ばり等について取扱われており, 又この種の単一板⁽¹⁾については周辺が既知の境界あるいは一定の力を受ける場合等について解析されているがわれわれは弾性基礎にある矩形板を構造要素とする平板結合体(箱型構造)の解析を行うに便利と思われる解式を誘導した。今回は対称曲げの場合について応用した例を示す。

II) 解法の概要: 弾性基礎にある矩形板が周辺に未知の拘束モーメントを受け, さらに拘束辺に未知の一定沈下を生ずる場合の端モーメント-たわみ角公式を作成する。この場合に節点方程式を簡易化するために不静定分布モーメントの矩形分割法⁽²⁾及び節線上に選点法を適用した。又周辺拘束辺の沈下量は反力の釣合いより求められる。

III) 解式



i) 相対2辺拘束, 他の2辺が自由辺の場合

図に示す様な弾性基礎にある相対2辺拘束相対2辺自由の矩形板の対称変形の場合の解式を示す。この様な平板はスラブ式ラーメン構造の構造要素として使用される。図で拘束辺は直圧により一定の沈下(δ_0)を生じ, 辺上の選点 P_n に於て矩形分割された一分布モーメント M_n が作用し M_n は数ブロックに分割されて拘束辺上の不静定モーメントの近似分布を形成する。

板を支配する釣合方程式は $\Delta \Delta w = \frac{P_n}{D} - \chi(\delta_0 + w)$ $\chi = \frac{k}{D}$ k : 基礎のバネ常数
上の場合のたわみの一般形は

$$w = \sum_n \left[\sum_m A_{nm} \{ m^2 + (2-\nu) \alpha^2 n^2 \} \phi_n(x) + A_{nm} \sin m \pi \xi \right] \sin n \pi \eta$$

$\alpha = \frac{a}{b}$ $\xi = \frac{x}{a}$ $\eta = \frac{y}{b}$, ν : ポアソン比, A_{nm} は板上の荷重分布及び側辺沈下量 δ_0 , 及び拘束モーメント M_n によって与えられる係数である。上式より選点 P_n のたわみ角-端モーメントの関係式を誘導すると例之は板上荷重が等分布⁽³⁾の場合には

$$\phi_n = \frac{16\pi}{Nb} \sum_n \left[\frac{(2-\nu)\delta_0}{\pi^2} \{ D_n + (2-\nu)\alpha^2 n^2 E_n \} \phi_n(x) + H_n \right] + \sum_n \frac{M_n \eta^2}{b^2} \{ F_n + (2-\nu)\alpha^2 n^2 G_n \} \phi_n(x) + I_n \}$$

$$E_n = -\frac{a^2}{4\pi^2 \beta_n \lambda_n} \left(1 - \frac{\cos \pi \beta_n}{\cosh \pi P_n} \right) \left(\beta_n + P_n \frac{\sin \pi \beta_n}{\sinh \pi P_n} \right), \quad D_n = \frac{a^2}{4\pi^2 \beta_n \lambda_n} \left(1 - \frac{\cos \pi \beta_n}{\cosh \pi P_n} \right) \left(\beta_n - P_n \frac{\sin \pi \beta_n}{\sinh \pi P_n} \right)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha^4 n^4 + \frac{a^4 \lambda^4}{\pi^4}}, \quad \lambda_n = 1 - \frac{\cos 2\pi \beta_n}{\cosh \pi P_n}, \quad P_n = \sqrt{\alpha^4 n^4 + \frac{a^4 \lambda^4}{\pi^4} + \alpha^2 n^2}, \quad \beta_n = \sqrt{\alpha^4 n^4 + \frac{a^4 \lambda^4}{\pi^4} - \alpha^2 n^2}$$

1). 原口忠次郎: 弾性基礎上の矢型板及び (1964, 独協刊行)

2). H. J. Fletcher, C. J. Thomas: Rectangular Plates on Elastic Foundation; Jour. of Applied Mech., Vol. 19

3). M. Kurata, H. Okamura; A Method of Analysis of a Solid Structure Composed of Plate Elements

"Publication" I.A.B.S.E (1964)

$$H_n = \frac{a^2}{4\pi^2 \gamma^2 \beta_n^2} \left\{ \frac{a^2 \gamma^2}{\pi^2} \left[n^2 (U_{n\pm 1/2} + U_{n-1/2}) + \frac{a^2 \gamma^2}{\pi^2} (V_{n\pm 1/2} + V_{n-1/2}) \right] \right\}$$

$$U_{n\pm 1/2} = \left\{ e^{-\pi P_n \beta_n} \sinh \pi \beta_n \pm \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\cosh 2\pi P_n} \sin \pi \beta_n (2-\xi) \right\} \lambda_n^{-1}, \quad V_{n\pm 1/2} = \left\{ e^{-\pi P_n \beta_n} \cosh \pi \beta_n \pm \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\cosh 2\pi P_n} \cos \pi \beta_n (2-\xi) \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$U_{n-1/2} = \left\{ \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\sinh \pi P_n} \sin \pi \beta_n \cosh \pi \beta_n \pm \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\cosh \pi P_n} \cos \pi \beta_n \sin \pi \beta_n \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$V_{n-1/2} = \left\{ \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\sinh \pi P_n} \sin \pi \beta_n \sinh \pi \beta_n \pm \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\cosh \pi P_n} \cos \pi \beta_n \cosh \pi \beta_n \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$G_n = X_{n\pm 1/2} - X_{n\pm 1/2}, \quad X_{n\pm 1/2} = \frac{a^2}{4\pi^2 \gamma^2 \beta_n^2} \left\{ P_n (Y_{n\pm 1/2} - Y_{n-1/2}) + \beta_n (S_{n\pm 1/2} - S_{n-1/2}) \right\} \quad \xi_j = \xi_j - \frac{1}{2t}, \xi_j' = \xi_j + \frac{1}{2t} \quad \text{C: 矩形分割数}$$

$$Y_{n\pm 1/2} = \left\{ e^{-\pi P_n \beta_n} \sin \pi \beta_n \pm \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\cosh 2\pi P_n} \sin \pi \beta_n (2-\xi) \right\} \lambda_n^{-1}, \quad S_{n\pm 1/2} = \left\{ e^{-\pi P_n \beta_n} \cos \pi \beta_n \pm \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\cosh 2\pi P_n} \cos \pi \beta_n (2-\xi) \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$Y_{n-1/2} = \left\{ \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\sinh \pi P_n} \sin \pi \beta_n \cosh \pi \beta_n \pm \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\cosh \pi P_n} \cos \pi \beta_n \sinh \pi \beta_n \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$S_{n-1/2} = \left\{ \frac{\cosh \pi P_n \beta_n}{\cosh \pi P_n} \cos \pi \beta_n \cosh \pi \beta_n \pm \frac{\sinh \pi P_n \beta_n}{\sinh \pi P_n} \sin \pi \beta_n \sinh \pi \beta_n \right\} \lambda_n^{-1}$$

$$F_n = Y_{n\pm 1/2} - Y_{n\pm 1/2}, \quad Y_{n\pm 1/2} = \frac{a^2}{4\pi^2 \gamma^2 \beta_n^2} \left\{ P_n (Y_{n\pm 1/2} - Y_{n-1/2}) - \beta_n (S_{n\pm 1/2} - S_{n-1/2}) \right\}$$

$$I_n = \frac{1}{2} (H_{n\pm 1/2} - H_{n\pm 1/2} - H_{n\pm 1/2} + H_{n\pm 1/2}) \quad \xi_K = \xi_j + \xi, \xi_K' = \xi_j - \xi, \xi_K = \xi_j + \xi, \xi_K' = \xi_j - \xi$$

$$\phi(x) = \left\{ (1-\nu) \lambda^2 \pi^2 \phi(x) + \frac{a^2 \lambda^2}{\pi^2} \phi(x) \right\} L_n, \quad L_n = a_n \sin \pi \beta_n - a_n' \sinh \pi P_n$$

$$f(x) = \sinh \pi P_n (1-\xi) \sin \pi \beta_n \pm \sinh \pi P_n \xi \sin \pi \beta_n (1-\xi), \quad g(x) = \cosh \pi P_n (1-\xi) \cos \pi \beta_n \pm \cosh \pi P_n \xi \cos \pi \beta_n (1-\xi)$$

拘束皿の沈下量 δ_0 は次式で与えられる

$$K\delta_0 + \frac{64\lambda^2 a^2}{\pi^2} \sum_n \left\{ \frac{g-K\delta_0}{\pi^2} \left\{ P_n + (2-\nu) a^2 n E_n \right\} Y_n + \frac{1}{n^2} J_n \right\} + \sum_n \frac{M_n \pi^2}{a b} \left\{ (F_n + (2-\nu) a^2 n G_n) Y_n + \frac{1}{n^2} K_n \right\} = \sum W$$

$$Y_n = \frac{1}{n^2 L_n \gamma^2} \left\{ (1-\nu) a^2 \gamma^2 (\beta_n \sinh \pi P_n - P_n \sin \pi \beta_n) + \frac{a^2 \gamma^2}{\pi^2} (\beta_n \sin \pi \beta_n + P_n \sinh \pi P_n) \right\}$$

$$J_n = \sum_m \frac{1}{m^2 P_{mn}}, \quad K_n = \sum_m \frac{1}{m^2 P_{mn}} \sin \pi \beta_n \xi \sin \pi \beta_n \frac{\pi}{2t}, \quad S_{mn} = \frac{\pi^2}{a^4} \left\{ (m^2 + a^2 n^2)^2 + \frac{a^2 \gamma^2}{\pi^2} \right\}, \quad \sum W = \text{全垂直荷重}$$

以上の解式を連立させて解を求める。

ii) 四辺が拘束される場合 i) の解式において、 $D_n = E_n = F_n = G_n = 0$ とおき全枠の手法で4方向の拘束モーメントを導入して解式を作成出来る。この平板要素は種々の構造物に含まれるものである。又、弾性基礎上にない一般の各種平板要素も同様にして解式を作成出来る。

IV) 計算例: 図に示す($a \times a \times a$)の開口箱形構造について計算した節線上のモーメント分布を示した。Case-2は等分布荷重及び側壁垂直力によるもの、Case-1は底版の部分荷重によるものである。Case-1では、基礎による均等化は少く、モーメントが集中する。この枠を計算法は、例えば、施工ジョイントで分割される箱形構造が、底版上に分布強度の大きい軸荷重を受ける場合等の2次元解析では評価不可能な断面力配分を基礎と一体化した立体構造として與えることが出来る。

Data: $K = 10 \text{ kg/cm}^2, a^4 \lambda^4 = 536, \nu = 0.2$
 各板の断面一定; Case 2: $\sum W = 48a^2$
 節線モーメントの矩形分割数5, 一辺上の壁数5.

