I ～ 1

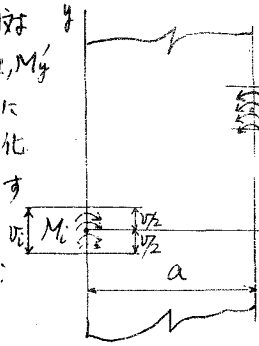
連続斜板の解析

大阪工業大学　正員　岡村宏一
大阪設計コンサルタンツKK　正員　吉田公憲
同　上　正員　○小林真一

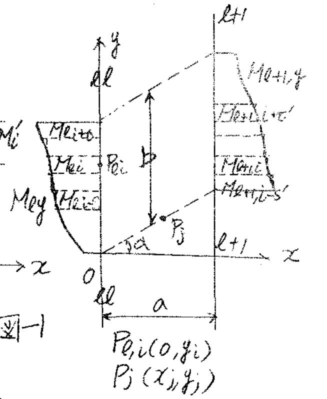
I) まえがき：　連続斜板構造は、例えば斜連続スラブ橋のように斜板と斜板の連続する形態のものと、斜スラブ式ラーメン構造のように斜板と矩形板の連続する形態のもの等があるが、この種の構造は構造力学上未知の点が多いように思われる。われわれはこのような構造に対する基本的な解式を求めたので斜連続3径間スラブ橋のタイプを例にとって解析結果と併せ報告する。

II) 解法の概要：　連続斜板を構成する要素である単一斜板について実際に最も利用度の高い相対する斜線境界が自由、他の相対2辺が連続節線となる場合についての解式を求めた。解式を容易に得るために直交座標を用い、斜に相対して分布する不静定モーメントの導入を簡易化するために、その分布を矩形に分割する近似法[1]および節線上に選点法[1]さらに斜線境界の自由条件を満足させるための選点法[2]を適用した。

III) 解式：　図−2に示すように斜に相対して分布する節線上の不静定モーメント M_y, M_y' を幾つかの等分布モーメント M_i, M_i' の集合による近似分布に置換すると、その導入が簡易化される。すなわち、この場合まず図−1に示す様な相対2辺単純支持の一方向無限板の原点Oにある分布巾 v をもつモーメント M_i の作用する場合のたわみ w を求めると



図−1



$$w_1 = w_{y=0} = \frac{2M_i a^2}{\pi^3 D}\left[\frac{\pi}{12}\xi(\xi^2-3\xi+2)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin m\pi\xi\left(1+\frac{m\pi v}{4a}\right)e^{-\frac{m\pi v}{2a}}\right],\quad \xi=\frac{x}{a},$$

$$w_2 = w_{y\geq v/2} = \frac{Ma}{2\pi^2 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sin\xi\left[\left(\frac{2a}{m\pi}+y-\frac{v}{2}\right)e^{\frac{-m\pi(2y-v)}{2a}}-\left(\frac{2a}{m\pi}+y+\frac{v}{2}\right)e^{\frac{-m\pi(2y+v)}{2a}}\right]$$

上記のたわみを用いて適当な重ね合せによって斜に相対して分布する節線上の不静定モーメントによる節線上の選点 P_i のたわみ角 $\theta_{i(M)}$ は次のようになる。

$$\theta_{i(M)} = \frac{2a}{\pi^2 D}\left\{a_m(v_i)M_i + a_m'(v_i)M_i'\right\} + \frac{1}{2\pi D}\left\{\sum_s M_{i-s}\sum_m U_m(y_s, v_{i-s}) + \sum_t M_{i+t}\sum_m U_m(y_t, v_{i+t})\right.$$
$$\left. - \sum_{s'} M_{i-s'}'\sum_m (-1)^m U_m(y_{s'}, v_{i-s'}) - \sum_{t'} M_{i+t'}'\sum_m (-1)^m U_m(y_{t'}, v_{i+t'})\right\}$$

$$a_m(v) = \frac{\pi}{6} - \sum_m \frac{1}{m^2}\left(1+\frac{m\pi v_i}{4a}\right)e^{-\frac{m\pi v_i}{2a}} \qquad a_m'(v) = \frac{\pi}{12} + \sum_m \frac{(-1)^m}{m^2}\left(1+\frac{m\pi v_i}{4a}\right)e^{-\frac{m\pi}{2a}v_i}$$

上式中 $y_s, y_t, y_{s'}, y_{t'}$ 等は分布モーメント作用中心より選点 P_i 迄の距離。

1) M. Kurata　H. Okamura.　A. Method of Approximation on the Plate Problem Memo. of the Faculty of Eng. Osaka City Univ. (1961)　2) 岡村：異形平板の境界値問題に対する選点法の応用について，大阪工大紀要，Vol. 8 No.2 (1962)

$$u_m(y,v)=\frac{a}{m}\left[\left(\frac{2a}{m\pi}-y-\frac{v}{2}\right)e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}}-\left(\frac{2a}{m\pi}+y+\frac{v}{2}\right)e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}}\right]$$

次に板上の荷重による選点 $P_{\ell i}$ のたわみ角 $\theta_{i(L)}$ も相対2辺単純支持の一方向無限板について求めればよく結局 $P_{\ell i}$ のたわみ角 θ_i の一般解 θ_i' は　$\theta_i'=\theta_{i(M)}+\theta_{i(L)}$
で表はされ対辺上の選点 $P_{\ell+1,i}$ のたわみ角も同様に求まる。次に図-2において一方向板上で切断される斜線境界上の選点 P_j 等において自由辺の条件を満足するための補足解を次の形に与える。

$$W_3=\sum_j^{p}\left[f_j(\eta)A_j-g_j(\eta)B_j+\bar{f}_j(\eta)A_j'-\bar{g}_j(\eta)B_j'\right]\sin m\pi\xi$$

$$f_j(\eta)=\left\{(\rho_2\lambda-\rho_1\eta)e^{j\pi\eta}+(\rho_2\lambda+\rho_0\eta)e^{-j\pi\eta}\right\}j\pi \qquad g_j(\eta)=\rho_1e^{j\pi\eta}+\rho_2e^{-j\pi\eta}$$

$$\bar{f}_j(\eta)=\left\{(\rho_2'\lambda-\rho_1'\eta)e^{j\pi\eta}+(\rho_2'\lambda+\rho_0'\eta)e^{-j\pi\eta}\right\}j\pi \qquad \bar{g}_j(\eta)=\rho_1'e^{j\pi\eta}+\rho_2'e^{-j\pi\eta}$$

$$\rho_0=\frac{1}{1-(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}} \qquad \rho_1=\frac{(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}}{1-(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}} \qquad \rho_2=\frac{(-1)e^{-j\pi\lambda}}{\{1-(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}\}^2}$$

$$\rho_0'=\frac{1}{1+(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}} \qquad \rho_1'=\frac{(-1)^je^{-j\pi\lambda}}{1+(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}} \qquad \rho_2'=\frac{(-1)^je^{-j\pi\lambda}}{\{1+(-1)^{j+1}e^{-j\pi\lambda}\}^2}$$

$\lambda=\frac{b}{a}+\tan\alpha$　　α：斜角，　$\eta=\frac{y}{a}$，　P：境界上の選点の数．

$$\theta_i''=\sum_{j=1}^{S}\frac{m\pi}{a}\left[f_j(\eta_i)A_j-g_j(\eta_i)B_j+\bar{f}_j(\eta_i)A_j'-\bar{g}_j(\eta_i)B_j'\right]$$

従って $\ell-1$ 径間（径間長 $a_{\ell-1}$）ℓ 径間（径間長 a_ℓ）で次の様な3連モーメント式が節線 $\ell-\ell$ 上の選点 P_i に対して成立する．

$$\frac{a_{\ell-1}}{D_{\ell-1}}\left[a_m'(v_i)M_{\ell-1,i}-\frac{\pi}{4}\left\{\sum_g M_{\ell-1,i-g}\sum_m(-1)^m u_m(y_g,v_{i-g})+\sum_r M_{\ell-1,i+r}\sum_m(-1)^m u_m(y_r,v_{i+r})\right\}\right]$$
$$+\left(\frac{a_{\ell-1}}{D_{\ell-1}}+\frac{a_\ell}{D_\ell}\right)\left[a_m(v_i)M_{\ell,i}+\frac{\pi}{4}\left\{\sum_s M_{\ell,i-s}\sum_m u_m(y_s,v_{i-s})+\sum_t M_{\ell,i+t}\sum_m u_m(y_t,v_{i+t})\right\}\right]$$
$$+\frac{a_\ell}{D_\ell}\left[a_m'(v_i)M_{\ell+1,i}-\frac{\pi}{4}\left\{\sum_s M_{\ell+1,i-s}\sum_m(-1)^m u_m(y_s,v_{i-s})+\sum_t M_{\ell+1,i+t}\sum_m(-1)^m u_m(y_t,v_{i+t})\right\}\right]$$
$$+\sum_j\left[f_{j\ell}(\eta_i)A_{j\ell}-g_{j\ell}(\eta_i)B_{j\ell}+\bar{f}_{j\ell}(\eta_i)A_{j\ell}'-\bar{g}_{j\ell}(\eta_i)B_{j\ell}'\right]\frac{j\pi}{a_\ell}-\sum_k\left[f_{k,\ell-1}(\eta_i)A_{k,\ell-1}-g_{k,\ell-1}(\eta_i)B_{k,\ell-1}\right.$$
$$\left.+\bar{f}_{k,\ell-1}(\eta_i)A_{k,\ell-1}'-\bar{g}_{k,\ell-1}(\eta_i)B_{k,\ell-1}'\right](-1)^k\frac{k\pi}{a_{\ell-1}}=\theta_{i(L)\ell-1}-\theta_{i(L)\ell}$$

又 A, B, A', B' 等の積分定数は各径間の自由辺境界選点に対して次式により決定される。

$$\sum_i\frac{i^2\pi^2}{a^2}\left[\left\{[C_1f_i(\eta_j)-2C_2g_i(\eta_j)]A_i+[C_1\bar{f}_i(\eta_j)-2C_2\bar{g}_i(\eta_j)]A_i'-C_1[g_i(\eta_j)B_i+\bar{g}_i(\eta_j)B_i']\right\}\sin i\pi\xi_j\right.$$
$$\left.-C_3\left\{[f_i'(\eta_j)-g_i'(\eta_j)]A_i+[\bar{f}_i'(\eta_j)-\bar{g}_i'(\eta_j)]A_i'-g_i'(\eta_j)B_i-\bar{g}_i'(\eta_j)B_i'\right\}\cos i\pi\xi_j\right]+\phi_j=0$$
$$\sum_i\frac{i^3\pi^3}{a^3}\left[\left\{[d_1f_i'(\eta_j)-d_2g_i'(\eta_j)]B_i+[d_1\bar{f}_i'(\eta_j)-d_2\bar{g}_i'(\eta_j)]B_i'\right\}\sin i\pi\xi_j+\left\{[d_3f_i(\eta_j)+2d_4g_i(\eta_j)]A_i\right.\right.$$
$$\left.\left.+[d_3\bar{f}_i(\eta_j)+2d_4\bar{g}_i(\eta_j)]A_i'-d_3[g_i(\eta_j)B_i+\bar{g}_i(\eta_j)B_i']\right\}\cos i\pi\xi_j\right]+\psi_j=0$$

$$f_i'(\eta_j)=\left\{(\rho_2\lambda-\rho_1\eta_j)e^{i\pi\eta_j}-(\rho_2\lambda+\rho_0\eta_j)e^{-i\pi\eta_j}\right\}i\pi, \qquad g_i'(\eta_j)=\rho_1e^{-i\pi\eta_j}-\rho_2e^{-i\pi\eta_j}$$
$$\bar{f}_i'(\eta_j)=\left\{(\rho_2'\lambda-\rho_1'\eta_j)e^{i\pi\eta_j}-(\rho_2'\lambda+\rho_0'\eta_j)e^{-i\pi\eta_j}\right\}i\pi \qquad \bar{g}_i'(\eta_j)=\rho_1'e^{-i\pi\eta_j}-\rho_2'e^{-i\pi\eta_j}$$

$C_1=(1-\nu)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$，$C_2=\cos^2\alpha+\nu\sin^2\alpha$，$C_3=-2(1-\nu)\sin\alpha\cos\alpha$　$d_1=(1-\nu)(3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cos\alpha$
$d_2=\{(1-\nu)(5\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+2\}\cos\alpha$　$d_3=(1-\nu)(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha$　$d_4=\{1+(1-\nu)(\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha)\}\sin\alpha$

ϕ_j，ψ_j は w_1，w_2 及び荷重の関数を用いて次式より得られるが w_3 と座標系を異にするので重ね合せに符号の注意を要する．

$$\phi_j=\left(a_1\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+a_3\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)(x_j,y_j)$$
$$\psi_j=\left(b_1\frac{\partial^3w}{\partial x^3}+b_2\frac{\partial^3w}{\partial y^3}+b_3\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial y}+b_4\frac{\partial^3w}{\partial x\partial y^2}\right)(x_j,y_j)$$

$a_1=\sin^2\alpha+\nu\cos^2\alpha$　$a_2=C_2$　$a_3=C_3$
$b_1=-\{1+(1-\nu)\cos^2\alpha\}\sin\alpha$，$b_2=\{1+(1-\nu)\sin^2\alpha\}\cos\alpha$
$b_3=\{1+(1-\nu)(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)\}\cos\alpha$
$b_4=-\{1+(1-\nu)(\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha)\}\sin\alpha$