Ⅳ～5

セミマルコフ過程としてみた交通量について

京都大学工学部　正員　吉川一男

1．概要

都市内におけるゾーン間の車の動きをマルコフ連鎖と仮定した解析がかなり良好な結果を与えたことが，いくつかの研究例によって示されているのであるが，マルコフ連鎖においては，各回の推移は同一時間内におこなわれることとなっているが，実際，車の運行は，ゾーンによって，駐車時間，走行時間が異なるのが普通である。この点に注目して，より現実的なモデルに接近することをこころみた。

2．セミマルコフ過程

iゾーンにいる車がjゾーンに向う確率をp_{ij}とし，これを要素とする行列を推移確率行列といい，Pであらわす。またiゾーンに到着した車がjゾーンに向うとして，jゾーンに到着するまでの時間の確率密度関数を$r_{ij}(t)$とする。これはiゾーンにおける駐車時間とiゾーンからjゾーンへの走行時間の和の確率密度関数である。その累積分布を$R_{ij}(t)$とし

$$ {}^{c}R_{ij}(t) = \int_t^\infty r_{ij}(\tau_{ij})\,d\tau_{ij} = 1-R_{ij}(t) = P\{\tau_{ij} \geqq t\} \qquad (1)$$

と定義する。

いま，$w_i(t)$を，iゾーンに到着した車が，どこでもよいが，とにかくつぎのゾーンに到着するまでの時間の確率密度関数とする。すなわち

$$w_i(t) = \sum_j p_{ij} r_{ij}(t) \qquad (2)$$

また，その平均値を$\bar{\tau}_i$とする。つぎに

$$W_i(t) = \sum_j p_{ij} R_{ij}(t) = \int_0^t w_i(\tau_i)\,d\tau_i \qquad (3)$$

$${}^{c}W_i(t) = \sum_j p_{ij}\,{}^{c}R_{ij}(t) = \int_0^\infty w_i(\tau_i)\,d\tau_i \qquad (4)$$

とする。時点0において，iゾーンにおり，時点tにおいてjゾーンにいる確率を$\phi_{ij}(t)$とする。これはマルコフ連鎖において，iゾーンを出発した車がt回目の推移ののちに，jゾーンにいる確率$p_{ij}^{(t)}$に対応するものである。これはつぎのような再帰方程式によって定義される。

$$\phi_{ij}(t) = \delta_{ij}\,{}^{c}W_i(t) + \sum_k p_{ik}\int_0^t d\tau\, r_{ik}(\tau)\,\phi_{kj}(t-\tau) \qquad (5)$$

（δ_{ij}はクロネッカーのデルタ）

(5)式をラプラス変換すれば

$$\phi_{ij}^{*}(s) = \delta_{ij}\,{}^{c}W_i^{*}(s) + \sum_k p_{ik} r_{ik}^{*}(s)\,\phi_{kj}^{*}(s) \qquad (6)$$

また，${}^{c}W_i^{*}(s) = \frac{1}{s}\left[1-w_i^{*}(s)\right]$ である。

さて，上の式を行列表示するため，つぎのように記号をきめる。$\Phi(t) = \{\phi_{ij}(t)\}$
$r(t) = \{r_{ij}(t)\}$，$w(t) = \{\delta_{ij} w_i(t)\}$，$W(t) = \{\delta_{ij} W_i(t)\}$，${}^{c}W(t) = \{\delta_{ij}\,{}^{c}W(t)\}$，
た，A，Bを正方行列とし，AとBの特別の積を$\otimes$であらわし，$A \otimes B = C$，$c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$とする。これから(6)式はつぎのように簡単になる。すなわち

$$\Phi^*(s) = {}^c W^*(s) + (P \otimes r^*(s)) \Phi^*(s) \tag{7}$$

$$\Phi^*(s) = [I - P \otimes r^*(s)]^{-1} \, {}^c W^*(s) \qquad (I\text{は単位行列}) \tag{8}$$

マルコフ連鎖において極限確率が重要であったように，セミマルコフ過程においても，極限確率は重要である。

$\Phi = \lim_{t \to \infty} \Phi(t)$ とすると，一般的に $\Phi = \lim_{s \to 0} s\Phi^*(s)$ が成立するから

$$\Phi = \lim_{s \to 0} s[I - P \otimes r^*(s)]^{-1} \lim_{s \to 0} {}^c W^*(s) \tag{9}$$

となり，$\lim_{s \to 0} {}^c W^*(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}[1 - w^*(s)]$ である。したがって

$$\lim_{s \to 0} {}^c W^*(s) = -\frac{d}{ds} w^*(s)\Big|_{s=0} = \int_0^\infty t\,w(t)\,dt = \bar{T} \tag{10}$$

これは，あるゾーンから別のゾーンに移る時間の平均値 $\bar{\tau}_i$ を対角要素とする行列である。$s[1 - P \otimes r^*(s)]^{-1} = T(s)$ とおけば $T(s) - T(s) P \otimes r^*(s) = sI$，$s \to 0$ とすれば $r^*(s)$ はすべての要素が1となるから $T(0) = T(0)P$ (11)

が成立する。ここで，マルコフ連鎖にもどって，極限状態確率を $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_N)$ とすれば $\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}$ ，$\sum_k \pi_k = 1$ (12)

一方，$T(0)$ の要素を $t_{ij}(0)$ とすれば

$$t_{ij}(0) = \sum_k t_{ik} p_{kj} \tag{13}$$

となる。ここで，$t_{ij}(0) = k_i \pi_j$ とおき，(13) 式に代入すれば (12) 式が(12)式が導かれ $T(0)$ の行ベクトルと，π とは一定の比をなすことがわかる。したがって (9) 式から

$\Phi = T(0)\bar{T}$ (14) すなわち $\phi_{ij} = t_{ij}(0)\bar{\tau}_j = k_i \pi_j \bar{\tau}_j$ (15)

$\sum_j \phi_{ij} = k_i \sum_j \pi_j \bar{\tau}_j = 1$ であるから $k_i = \dfrac{1}{\sum_j \pi_j \bar{\tau}_j}$ (16)

となり，k_i は i に関係のない一定数である。したがって

$$\phi_{ij} = \frac{\pi_j \bar{\tau}_j}{\sum_j \pi_j \bar{\tau}_j} = \phi_j \tag{17}$$

が成立し，極限状態確率が出発点によらないことはマルコフ連鎖の場合と同じであることがわかる。また，極限確率がマルコフ連鎖の極限確率を $\bar{\tau}_j$ によってウェイトづけられたものであるから，計算上の手続きはマルコフ連鎖の場合と同程度である。

さて，考えているゾーン間における全走行車を T とする。極限状態確率が ϕ_i であるから，i ゾーンにける車の台数は定常状態においては $T\phi_i$ である。また，i ゾーンから j ゾーンに向う確率が p_{ij} であるから (i,j) 間の O.D トリップは $T\phi_i p_{ij}$ に比例する。したがって，平均トリップ数 N がわかっている場合は (i,j) 間 O.D 交通量 K_{ij} は

$$K_{ij} = NT \cdot \frac{T\phi_i p_{ij}}{\sum_{l,m} T\phi_l p_{lm}} = NT \frac{\phi_i p_{ij}}{\sum_{l,m} \phi_l p_{lm}} \tag{18}$$

となる。