IV～4

連続吸収マルコフ過程による交通密度の解析

京都大学工学部　正　員　　佐佐木　綱
京都大学工学部　学生員　○松　井　寛

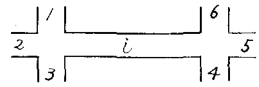
I．まえがき

現在都市内の街路における交通麻痺対策として諸種の交通規制が実施されているが、交通規制を行うにあたって理論的根拠に基いているとは言えないのが現状で、都市全体からみて最も合理的な交通規制を決定する必要がある。そのためには都市内街路上の輻湊する交通流を理論的に把握する必要がある。本論文においては交通流を確率的立場からとらえ、いわゆる連続マルコフ過程を用いて都市内の複雑に交差する街路網上の交通流を理論的に解明し、交通流が交通麻痺の状態に到るまでの過渡状態を交通密度との関連から解析することにつとめた。

II．理論

市街地の街路網の基本的な形を図-1のようにとる。街路 i に対してその左右の交差点を通って街路 $1, 2 \cdots 6$ から車が出入りする状態を考える。いま街路を等区間に分けて考えると、その街路内にある自動車数はその街路の交通密度を表わすことに注目して、街路 i に対して時刻 t における自動車数(交通密度)、車の空間平均速度をそれぞれ $f_i(t), v_i(t)$ とし、Δt 時間後の街路 i の交通量 Q_i を考えると、$Q_i(t)=f_i(t)v_i(t)$ なる関係式から、

図-1



$$f_i(t+\Delta t)v_i(t+\Delta t)-f_i(t)v_i(t)=\sum_{k=1}^{6}P_{ik}(t+\Delta t/t)f_k(t)v_k(t)-\sum_{k=1}^{6}P_{ki}(t+\Delta t/t)f_i(t)v_i(t) \quad \cdots\cdots (1)$$

が成立する。ここで $P_{ik}(t+\Delta t/t)$ は、車が時刻 t で街路 k にあり時刻 $t+\Delta t$ には街路 i にある推移確率を表わす。$P_{ki}(t+\Delta t/t)$ はその逆の確率である。ところで $\sum_{k=1\cdots 6, i}P_{ki}(t+\Delta t/t)=1$ なることから、右辺第二項は $P_{ii}(t+\Delta t/t)f_i(t)v_i(t)$ と書ける。また $P_{ik}(t/t)\,(=0)$ を利用して式(1)を書き直せば、

$f_i(t+\Delta t)v_i(t+\Delta t)-f_i(t)v_i(t)=\sum_{k=1\cdots 6, i}\{P_{ik}(t+\Delta t/t)-P_{ik}(t/t)\}f_k(t)v_k(t)$ となりさらに両辺を Δt でわり $\Delta t\to 0$ にすれば結局、

$$\frac{d f_i(t)v_i(t)}{dt}=\sum_{k=1\cdots 6, i}q_{ik}f_k(t)v_k(t) \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。ここで $q_{ik}=\lim_{\Delta t\to 0}\{P_{ik}(t+\Delta t/t)-P_{ik}(t/t)\}/\Delta t$ で、これが連続マルコフ過程における推移確率速度と呼ばれるもので、具体的には単位時間あたりに推移する自動車数をしめす。

一般に交通密度と車の平均速度との間には、$v_i(t)=a_i-\frac{b_i}{B_i}f_i(t)$ (B_i は街路 i の車線数、a_i, b_i は街路 i の状態によって決まる常数)なる関係がある。すなわち交通量－密度曲線を放物線と仮定すれば、式(2)はさらに次のようになる。

$$\left\{a_i-\frac{2b_i}{B_i}f_i(t)\right\}\frac{df_i(t)}{dt}=\sum_{k=1\cdots 6, i}q_{ik}f_k(t)\left\{a_k-\frac{b_k}{B_k}f_k(t)\right\} \qquad 0\le f_i(t)\le\frac{a_i}{b_i}B_i \quad \cdots\cdots (3)$$

よって各街路について式(3)をたて連立微分方程式とし与えられた初期条件のもとに解けば、各街路の交通密度が求められる。式(3)を交通量 $Q_i(t)$ で表わすことを考えると、

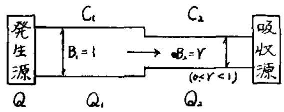
$$\pm\,dQ_i(t)/dt=\sum_{k=1\cdots 6, i}q_{ik}Q_k(t) \qquad 0\le Q_i(t)\le\frac{a_i^2}{4b_i}B_i \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで $0 \leq f_i(t) \leq \frac{a_i}{2b_i}B_i$ の場合には正符号、$\frac{a_i}{2b_i}B_i < f_i(t) \leq \frac{a_i}{b_i}B_i$ の場合には負符号をとる。

Ⅲ. 簡単な適用例

一般に各街路ごとにその幅員およびその他の道路状況によって交通量－密度曲線が決定される。この曲線である交通密度の時に最大交通量をしめし、これをその街路の交通容量と呼ぶ。街路 i に対しては交通密度 $f_i(t)=\frac{a_i}{2b_i}B_i$ のとき最大交通量 $Q_i(t)=\frac{a_i^2}{4b_i}B_i$ をしめし、これが街路 i の交通容量となる。したがって $0 \leq f_i(t) \leq \frac{a_i}{2b_i}B_i$ では交通麻痺は起らず、$\frac{a_i}{2b_i}B_i \leq f_i(t) \leq \frac{a_i}{b_i}B_i$ では交通麻痺状態にあると考えられる。いま図-2のようなモデルを考え、発生源から出た自動車が吸収源に吸収されていく時に、街路 1, 2 に現われる交通量を計算する。簡単のため街路 1, 2 の長さは等しく車道幅員をそれぞれ $1, r$ とし、発生源には一定交通量 Q を与え、g の値はすべて 1 とした場合について式(4)をたて解くと次のとおりである。ただし街路 1, 2 の交通容量をそれぞれ C_1, C_2 とする。

図-2



○ $Q < C_2$ の時

$$Q_1=(1-e^{-t})Q \qquad 0 \leq t$$

$$Q_2=(1-e^{-t}-te^{-t})Q \qquad 0 \leq t$$

この場合には街路 1, 2 いずれにも交通麻痺は発生せず、定常状態でそれぞれ Q なる交通量をしめす。

○ $C_2 < Q < C_1$ の時

$$Q_1=(1-e^{-t})Q \qquad 0 \leq t$$

$$Q_2=(1-e^{-t}-te^{-t})Q \qquad 0 \leq t \leq t_1 \qquad Q_2(t_1)=C_2$$

$$=\{1-\tfrac{1}{2}e^{-t}-(\tfrac{1}{2}+t_1)e^{t-2t_1}\}Q \qquad t_1 < t \leq t_2 \qquad Q_2(t_2)=0$$

街路 1 では交通麻痺にいたらないが、街路 2 において時刻 t_1 で最大交通量をしめし、以後交通量は逆に減少し時刻 t_2 で完全に交通が停滞する。

○ $C_1 < Q$ の時

$$Q_1=(1-e^{-t})Q \qquad 0 \leq t \leq t_3 \qquad Q_1(t_3)=C_1$$

$$=(1-e^{t-2t_3})Q \qquad t_3 < t \leq 2t_3$$

$$Q_2=(1-e^{-t}-te^{-t})Q \qquad 0 \leq t \leq t_4 \qquad Q_2(t_4)=C_2$$

$$=\{1-\tfrac{1}{2}e^{-t}-(\tfrac{1}{2}+t_4)e^{t-2t_4}\}Q \quad \begin{cases} t_4 < t \leq t_3 & \text{ただし } Q_2(t_3) \geq 0 \text{ の時} \\ t_4 < t \leq t_5 & \text{ただし } Q_2(t_3) < 0 \text{ の時} \end{cases}$$

ここで $Q_2(t_5)=0$

$$=\{1+te^{t-2t_3}-(\tfrac{1}{2}+t_3)e^{t-2t_3}-(\tfrac{1}{2}+t_4)e^{t-2t_4}\}Q \qquad t_3 < t \leq t_6 \qquad Q_2(t_6)=0$$

この場合には、時刻 t_3 でまず街路 1 に最大交通量をしめし次第に交通麻痺の状態になり時刻 $2t_3$ で完全に交通が停滞する。しかしながら街路 2 では、それ以前に交通麻痺状態をしめし $t_4(<t_3)$ で最大交通量となり以後時刻 t_5 ないし t_6 で完全に交通が停滞する。

Ⅳ. あとがき

本論文においては、市街地街路上での交通麻痺現象を理論的に解析することにつとめたわけであるが、今後の問題としては、いままで市街地街路を対象としながらも信号機については問題にしなかった。よって信号機の設置によって交通流を調整して交通停滞を防ぐこと、逆にいえば信号機の合理的な配置、合理的な信号周期の解明にも発展させねばならない。