Ⅱ〜17

河床付近における砂粒の運動機構に関する研究

京大防災研究所　正会員　土屋義人

同　上　　　　　正会員　○角野　稔

1. 緒言

水流による砂粒の運動機構はきわめて複雑であり，その力学的機構は十分解明されていない。とくに，砂面近傍における砂粒の運動は，複雑な乱れの場の特性に関連して，いっそう複雑である。1936年 Bagnold は飛砂の運動を詳細な実験によって検討し，砂粒の運動が放物体として取扱われることを見出し，1951年河村はこの考えにもとづいて飛砂の理論を展開している。1964年 Owen は同様な取扱いをさらに進め，飛砂流中の流速分布を求めて飛砂量公式を導いておるが，これらの研究はいずれも，粒子に働く流体抵抗のみを考慮している。1963年 Yalin は同様な考え方に立脚して水流による砂粒の運動を論じ，流砂量公式を導いている。一方，1957年大島は乱流中における粒子の運動を流体力学的に検討するために，Lagrange の方法によって粘性流体中における粒子に作用する力を求め，その不安定性を追求して気体運動論との関係を明らかにしている。1957年 Ford は粒子の回転を考慮した計算を試みている。実験的研究においては，飛砂に関する Bagnold，河村，Ford らの研究にはじまり，最近では水流の場合に対して，岸らが詳細な実験を試み，主として Yalin の理論と比較しているのは注目に値する。こうした現状において，著者らも砂粒の運動機構を究明すべく実験的研究を始めたが，ここでは粒子の運動に及ぼす Magnus 効果について簡単な考察を試みた結果について述べる。

2. 水流中における砂粒の運動方程式

粘性流体中における球状粒子の運動方程式は，適当なエネルギー逸散関数の表示にしたがって，Lagrange の方法で求めることができるが，いま大島の結果にしたがえば，つぎのようにあらわされる。

$$d\vec{V}/dt = a(\vec{U}-\vec{V})\times \mathrm{rot}\,\vec{U} + b(\vec{U}-\vec{V}) - c\nabla p + e\Delta\vec{U} + f\vec{X} \qquad (1)$$

ただし，砂粒は球形で十分小さく，Stokes の法則が適用されるものとし，かつ床面との摩擦は考えない。ここに，$\vec{V}$：砂粒の速度ベクトルで，その x, y, z 方向の成分は U, V, W；$\vec{U}$：流れの速度ベクトルで，その成分は u, v, w；p：圧力；$\vec{X}$：質量力ベクトル，であり，a, b, c, e，および f は次式であらわされる。

$$\left.\begin{aligned} a &= (3/2)/(\sigma/\rho+1/2), \quad b = 36\nu/d^2(\sigma/\rho+1/2), \quad c = (3/2)/\rho(\sigma/\rho+1/2) \\ e &= 18\nu/(\sigma/\rho+1/2), \quad f = (\sigma/\rho)/(\sigma/\rho+1/2) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ここに，σ および ρ：砂粒および水の密度；ν：動粘性係数，d：砂粒の大きさである。式(1)の各項の意味は，つぎのとおりである。すなわち，右辺第1項は Magnus 効果，第2項は Stokes の法則にもとづく流体抵抗，第3および4項はそれぞれ圧力こう配および粘性による抵抗をあらわし，さらに第5項はいわゆる質量力である。

いま，z 方向にのみ流速分布がある等流の場を対象とし，さらに式(1)の右辺第3および

4項が省略されるものと仮定すれば，x, y, z 方向における砂粒の運動方程式は，つぎのようにあらわされる。

$$dU/dt = aW\,du/dz + b(u-U)\ ,\quad dV/dt = -bV\ ,\quad dW/dt = a(u-U)\,du/dz - bW - fg \tag{3}$$

ここに，g は重力の加速度である。

3．砂粒の運動方程式の解および考察

初期条件：$t=0$ で $U=U_1$，$V=V_1$ および $W=W_1$ を満足する式(3)の解は，簡単に求められて，つぎのようにあらわされる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{U}{u} &= \left\{1-\frac{(a/b)(du/dz)(fg/bu)}{(a/b)^2(du/dz)^2+1}\right\}\left\{1-e^{-bt}\cos(a/b)(du/dz)bt\right\}+\frac{U_1}{u}e^{-bt}\cos(a/b)(du/dz)bt \\
&\quad +\left\{\frac{W_1}{u}+\frac{fg/bu}{(a/b)^2(du/dz)^2+1}\right\}e^{-bt}\sin(a/b)(du/dz)bt\ ,\quad \frac{V}{V_1}=e^{-bt} \\
\frac{W}{u} &= -\frac{fg/bu}{(a/b)^2(du/dz)^2+1}\left\{1-e^{-bt}\cos(a/b)(du/dz)bt\right\}+\frac{W_1}{u}e^{-bt}\cos(a/b)(du/dz)bt \\
&\quad -\left\{\frac{(a/b)(du/dz)(fg/bu)}{(a/b)^2(du/dz)^2+1}-1+\frac{U_1}{u}\right\}e^{-bt}\sin(a/b)(du/dz)bt
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

この結果によると，式(3)に含まれる *Magnus* 効果は，たとえば第1式右辺第1項および時間の周期関数としてあらわれている。そして，初速度から時間の経過とともに単調に流れの速度に漸近するのではなくて，わずかな周期的な変動ののちに近づくことがわかる。いま，一例として，層流底層内における砂粒の運動を対象とすることにするが，この層内における複雑な乱れの効果を一切省略することにすれば，流速分布は $u/u_* \simeq u_* z/\nu$ によって近似的にあらわされるから，式(4)中に含まれる無次元量は，つぎのように変形される。

$$\left.\begin{aligned}
&(a/b)(du/dz) = (1/24)(u_* d/\nu)^2\ ,\quad fg/bu = \{(\sigma/\rho)/36\}(gd/u_*^2)(d/z) \\
&bt = \{36/(\sigma/\rho + 1/2)\}(\nu t/d^2)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ここに，u_* は摩擦速度である。したがって，$u_* d/\nu \simeq 5$ 程度で，砂粒の大きさが，0.1 mm 程度のものを考えると，式(4)右辺第1項中の *Magnus* 効果の大きさは，たかだか数％程度のものであるが，その時間的変化に対しては，周期的な現象があらわれることになる。また，この場合の砂粒の運動軌跡は，流速 u が z の関数であることに注意して，再度積分することによって求めることができるが，結果は複雑である。*Magnus* 効果を省略する場合には，すでに河村が求めている関係と対応するが，とくに流速分布を一様と仮定し，bt の値が小さい場合には，いわゆる放物体の運動に近かくなる。

なお，床面付近における乱れの特性を考慮すべき場合には，式(1)の右辺第3および4項について，さらに検討すべきである。とくに，*Irmay* らの結果によれば，層流底層内における複雑な加速領域が存在するので，この領域における砂粒の運動は興味深い。

4．結　語

床面付近における砂粒の運動機構を解明すべく，さらに詳細な理論的考察を行なうつもりである。また，砂粒の運動に関する詳細な実験を実施しているので，それらの結果をつけ加えて講演時に発表したい。本研究は文部省科学研究費による研究の一部である。