II～1　　流体の運動に対する変分原理の適用

京都大学工学部　正会員　平岡正勝
〃　〃　〃　○田中幹也

1. 緒　言

粘性流体の運動を理論的に研究するには、層流の場合、Navier-Stokesの方程式を適当な境界条件の下で解くという境界値問題に帰着されるわけであるが、この問題の厳密解が解析的に得られるのは、きわめて簡単な場合に限られる。N.S.方程式は、慣性項(convective term)を含む一般の場合、速度に関して非線形であるため、線形の場合には有効な多くの解法も、この場合利用することができない。また、たとえ線形の場合であっても、円形以外の断面をもつダクトやチャンネル内の流れのように、流体境界の幾何学的形状が複雑な場合には解析が困難となる。このような問題を解くためには、もちろん、必要な数値をすべて指定することによって数値計算法を適用することもできるが、解を式の形で得た方が便利なことも多い。このような目的で、いままで種々の近似解法が考えられてきた。例えば、級数展開法、摂動法、境界層理論における *von Kármán* の方法、変分法などがそうである。ニュートン流体の運動に対する変分原理として知られているのはHelmholtzの原理(1868)[1]であるが、この原理の非ニュートン流体への拡張はBird (1960)[2], Johnson (1960)[3], Schechter (1962)[4]らによって研究された。しかし、これらはいずれも定常状態にしかあてはまらないので、ここでは非定常状態を含むニュートン流体の運動に対する変分原理を提出する。

2. 変分原理

非圧縮性ニュートン流体に対する運動方程式

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}]-\nabla p+\rho\boldsymbol{g} \quad\cdots\cdots(1)$$

連続の式 $(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$ ……(2)　,応力の式 $\boldsymbol{\tau}=-2\mu\boldsymbol{d}$ ……(3)　, ここに

$$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}[(\nabla\boldsymbol{v})+{}^t(\nabla\boldsymbol{v})] \quad\cdots\cdots(4)$$

ただし、密度ρおよび粘性係数μは一定、あるいは位置座標$\boldsymbol{r}$のみの関数であるとする。

考えている領域Vの表面Sにおいて与えられた境界条件

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0\,(given)\quad on\ S_v \quad\cdots\cdots(5)\quad,\quad \boldsymbol{\tau}+p\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\pi}^0\,(given)\quad on\ S_\tau \quad\cdots\cdots(6)$$

のもとで基礎方程式を解く境界条件について考えよう。ここにS_vとS_τは互に重複せず$S=S_v+S_\tau$であり、$\boldsymbol{\delta}$は単位テンソルである。この問題に対する変分原理はつぎのように定式化される。汎関数

$$I[\boldsymbol{v},p]=\int_V[\rho\bar{\boldsymbol{v}}_t\cdot\boldsymbol{v}+(\rho\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}+\Phi-p(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}]\,dV+\int_{S_\tau}[\boldsymbol{\pi}^0\cdot\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{v}\,dS \quad\cdots\cdots(7)$$

を、許容条件(*admissibility condition*) (5)式のもとで停留にするような関数$\boldsymbol{v}$, pは、先に与えられた境界値問題の解である。(7)式中のΦは、粘性によるエネルギーの消散を表わ

し、$\Phi=\frac{1}{2}(-\tau:\nabla v)$ ········(8) で定義される。汎関数$I[v,p]$に含まれる速度ベクトルvと$\bar{v}$は区別することが必要である。すなわちvは変関数、$\bar{v}$は停留関数を表わしている。したがって変分はvのみについてとり、$\bar{v}$は停留値に固定される。この原理を証明するには、(7)式の第一変分$\delta I=0$とおいて得られるEulerの方程式と自然境界条件が、もとの境界値問題と一致することを示せばよいのであるが、ここでは省略する。さらに変分問題の変換によって、つぎの相反変分原理を導くことができる。すなわち、汎関数

$$H[\tau]=-\int_V \Psi(\tau)dV-\int_{S_V}[\pi\cdot n]\cdot v^{\circ}dS \cdots\cdots(9)$$，ここに $\Psi(\tau)=\frac{1}{4\mu}(\tau:\tau:)$ ······(10)

を許容条件 $\rho\frac{D\bar{v}}{Dt}=-[\nabla\cdot\tau]-\nabla p+\rho g$ ····(11)，$\tau+p\delta=\pi^{\circ}$ on S_τ ·····(12)，$\tau+p\delta=\pi$ on S_v ····(13) のもとで停留にするようなτは、はじめの境界値問題の解である。汎関数$I[v,p]$の停留値をI_0、$H[\tau]$のそれをH_0とすると、最大および最小の原理として、$H[\tau]\leqq H_0=I_0\leqq I[v]$ ·····(14) という関係が成り立つ。ただし$I[v]$は(7)式に許容条件として(2)式を付加したものである。この関係は直接法による近似計算の誤差評価に対して有効である。[5]

3. Lagrange-Biotの方程式

もとの境界値問題を解く代りに、それと等価な変分問題を直接法(Ritz or Galerkinの方法)によって近似的に解くことができる。いま、一般的に、許容比較関数として、$v(r,t)=v(q_1,q_2,\cdots,q_n;r)$ ·····(15) という関数形を仮定する。ここにq_iは時間tのみに依存する未知のパラメーターで一般化座標とよばれる。これを決定するためのLagrange-Biot[6]の方程式は、(7)式に(2)式を付加した$I[v]$を$q_1,q_2,\cdots,q_n$について変分することにより、つぎのように求められる。

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \cdots\cdots(16)$$，ここに、$U=\int_V \Phi dV$ ······(17)

$$D=\int_V \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dV \cdots\cdots(18),\quad Q_i=Q_i^{v}+Q_i^{p}+Q_i^{g}+Q_i^{S_\tau} \cdots\cdots(19)$$

$$Q_i^{v}=-\int_V(\rho v\cdot\nabla v)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)dV \cdots\cdots(20),\quad Q_i^{p}=\int_V p\frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\cdot v)dV=0 \cdots\cdots(21)$$

$$Q_i^{g}=\int_V \rho g\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)dV \cdots\cdots(22),\quad Q_i^{S_\tau}=-\int_{S_\tau}[\pi^{\circ}\cdot n]\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)dS \cdots\cdots(23)$$

ここで述べた原理の具体的な問題に対する応用例は発表の際にゆずる。

[参考文献] 1) H. Lamb : Hydrodynamics, 6th Ed. p.617, Cambridge (1959)
2) R. B. Bird : The Physics of Fluids, 3, 539-541 (1960)
3) M. W. Johnson : The Physics of Fluids, 3, 871-878 (1960)
4) R. S. Schechter : Chem. Eng. Sci., 17, 803-806 (1962)
5) 林, 村 : "変分法", コロナ社 (1961)
6) M. A. Biot : J. Aeronautical Sciences, 24, 857-873 (1957)