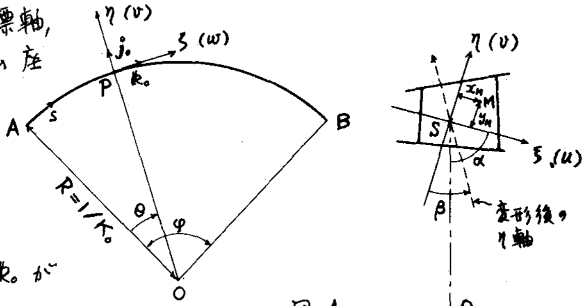
I～15

曲線材の変形の基礎方程式

大阪大学工学部　正員　安宅　勝
同上　　○正員　波田凱夫

本年度の年次講演会において，軸線が任意の空間曲線をなす曲線材の変形に関する一般式について述べたが，これを円弧曲線梁の微小変位理論の場合に適用して，任意の荷重を受ける曲線梁の，任意の変形に関する基礎式を得たものである。ここでは，曲線材の中立軸の幾何学的な曲率半径というものにとらわれず，変形の幾何学的な量（曲率，ねじれ率等）はすべて，部材断面の弾性主軸に関連した量として与えられている。

図１で，ζ は軸線の接線方向の座標軸，ξ, η はこれと垂直な面内の弾性主軸方向の座標軸（ξ, η, ζ は右手系）とし，それぞれの方向の変位成分を u, v, w とする。また ξ 軸は，軸線 $\overset{\frown}{AB}$ の幾何学的主法線 $\overline{OS}$ と α なる角をなすものとする。ここで ξ, η, ζ 上に単位ベクトル $\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0$ をとり，$\boldsymbol{k}_0$ が η 軸まわりに，右ねじ回転方向にまわるときの回転角の変化率（η 軸まわりの曲率という）$K_{\eta 0}$，および，ξ 軸まわりの曲率 $K_{\xi 0}$ は，ベクトル解析により次式であたえられる。（これらを曲率 K_0 の ξ, η 成分とよぶ。）



図・1

$$K_{\xi 0} = -\boldsymbol{k}_0' \cdot \boldsymbol{j}_0 = K_0 \sin\alpha, \quad K_{\eta 0} = -\boldsymbol{i}_0' \cdot \boldsymbol{k}_0 = K_0 \cos\alpha \qquad (\text{ ' は } d/ds \text{ をあらわす。}) \tag{1}$$

つぎに，この部材が任意の荷重を受けて変形した時の状態を考える。単位ベクトル $\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0$ が，変位後，$\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta$ になったとする。このとき，曲率の ξ, η 成分および ζ 成分（いわゆるねじれ率）は次式であたえられる。

$$\left.\begin{array}{l} K_\xi = \boldsymbol{e}_\eta' \cdot \boldsymbol{e}_\zeta = K_{\xi 0} + K_{\eta 0}\beta - v'' + K_{\xi 0} w', \quad K_\eta = \boldsymbol{e}_\zeta' \cdot \boldsymbol{e}_\xi = K_{\eta 0} - K_{\xi 0}\beta + u'' + K_{\eta 0} w' \\ K_\zeta = \boldsymbol{e}_\xi' \cdot \boldsymbol{e}_\eta = \beta' + K_{\xi 0} u' + K_{\eta 0} v' \qquad (\text{ ' は } d/ds \text{ をあらわす。}) \end{array}\right\} ^{※)} \tag{2}$$

これらがいわゆる曲線材の変形後の曲率およびねじれ率である。また，その他の幾何学量として，軸線の伸び ε と，接線ベクトルの回転角の成分 $\boldsymbol{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{i}_0$，$\boldsymbol{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{j}_0$ が次のように得られる。

$$\varepsilon = w' - uK_{\eta 0} + vK_{\xi 0}, \quad \boldsymbol{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{i}_0 = u' + wK_{\eta 0}, \quad \boldsymbol{e}_\zeta \cdot \boldsymbol{j}_0 = v' - wK_{\xi 0} \tag{3}$$

つぎに，釣合方程式として，Kirchhoff-Clebsch の式 ※※) において微小変位を仮定すれば，

$$\left.\begin{array}{lll} Q_\xi' + Q_\zeta K_{\eta 0} + q_\xi = 0, & Q_\eta' - Q_\zeta K_{\xi 0} + q_\eta = 0, & Q_\zeta' - Q_\xi K_{\eta 0} + Q_\eta K_{\xi 0} + q_\zeta = 0 \\ M_\xi' + M_\zeta K_{\eta 0} - Q_\eta + m_\xi = 0, & M_\eta' - M_\zeta K_{\xi 0} + Q_\xi + m_\eta = 0, & M_\zeta' - M_\xi K_{\eta 0} + M_\eta K_{\xi 0} + m_\zeta = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

ここに，Q_ξ etc. は ξ etc. 方向のせん断力及び軸力，M_ξ etc. は ξ etc. 軸を右ねじの方向にねじるモーメント（従って M_ξ, M_η は曲げ，M_ζ はねじり）q_ξ etc. は ξ etc. 方向の分布荷重，m_ξ etc. は ξ etc. 軸をねじる方向に働く分布モーメント荷重である。

さらに，せん断中心 M の座標を（x_H, y_H）とするとき，M_ξ, M_η, M_ζ は次式で与えられる。

※) 年次講演会予稿では，さらに一般的な形であたえられている。　※※) Love ; Mathematical Theory of Elasticity Chapt. XVIII

$$M_\xi = EJ_x(K_{\eta 0}\beta - v_M'' + K_{\zeta 0} w_M'), \quad M_\eta = EJ_y(-K_{\zeta 0}\beta + u_M'' + K_{\eta 0} w_M')$$
$$M_\zeta = GI(\beta' + K_{\zeta 0}u_M' + K_{\eta 0}v_M') - EC_w(\beta''' + K_{\zeta 0}u_M''' + K_{\eta 0}v_M''') - Q_\xi y_M + Q_\eta x_M \qquad (5)$$

たゞし，u_M etc. は M の変位量であり，$u_M = u - y_M\beta$, $v_M = v + x_M\beta$, $w_M = w - x_M e_\zeta i_0 - y_M e_\zeta j_0$ である。
また，断面力に関しては (5) の他に，次式が成り立つ。

$$Q_\zeta = EF\varepsilon = EF(w' - K_{\eta 0}u + K_{\zeta 0}v) \qquad (\text{F は断面積}) \qquad (6)$$

以上の諸式より，変位量 u, v, w, β に関する基礎方程式がつぎのように得られる。

w	v	u	β	荷重項
$-(EF+K_{\zeta 0}^2EJ_x+K_{\eta 0}^2EJ_y)D^2$	$(K_{\zeta 0}EJ_x+K_{\eta 0}^2y_MEJ_y)D^3 - K_{\zeta 0}EFD$	$(K_{\zeta 0}^2x_MEJ_x-K_{\eta 0}EJ_y)D^3 + K_{\eta 0}EFD$	$(K_{\zeta 0}x_MEJ_x+K_{\eta 0}y_MEJ_y)D^3 - K_{\zeta 0}K_{\eta 0}(EJ_x-EJ_y)D$	$q_\zeta + K_{\zeta 0}m_\xi + K_{\eta 0}m_\eta$
$(K_{\zeta 0}EJ_x+K_{\eta 0}^2y_MEJ_y)D^3 - K_{\zeta 0}EFD$	$-(K_{\eta 0}^2EC_w+EJ_x+K_{\eta 0}^2y_MEJ_y)D^4 + K_{\eta 0}^2GID^2 - K_{\zeta 0}^2EF$	$-(K_{\zeta 0}K_{\eta 0}EC_w+K_{\zeta 0}x_MEJ_x - K_{\eta 0}y_MEJ_y)D^4 + K_{\zeta 0}K_{\eta 0}GID^2 - K_{\zeta 0}K_{\eta 0}EF$	$-(K_{\eta 0}EC_w+x_MEJ_x+K_{\eta 0}y_M^2EJ_y)D^4 + K_{\eta 0}(GI+EJ_x-K_{\zeta 0}y_MEJ_y)D^2$	$-m_\xi' - q_\eta - K_{\eta 0}y_Mm_\eta'$
$(K_{\zeta 0}^2x_MEJ_x-K_{\eta 0}EJ_y)D^3 + K_{\eta 0}EFD$	$-(K_{\zeta 0}K_{\eta 0}EC_w+K_{\zeta 0}x_MEJ_x + K_{\eta 0}y_MEJ_y)D^4 + K_{\zeta 0}K_{\eta 0}GID^2 - K_{\zeta 0}K_{\eta 0}EF$	$-(K_{\zeta 0}^2EC_w+K_{\zeta 0}^2x_M^2EJ_x+EJ_y)D^4 + K_{\zeta 0}^2GID^2 - K_{\eta 0}^2EF$	$-(K_{\zeta 0}EC_w+K_{\zeta 0}x_M^2EJ_x-y_MEJ_y)D^4 + K_{\zeta 0}(GI+K_{\eta 0}x_MEJ_x+EJ_y)D^2$	$m_\eta' + q_\xi - K_{\zeta 0}x_Mm_\xi'$
$(K_{\zeta 0}x_MEJ_x+K_{\eta 0}y_MEJ_y)D^3 - K_{\zeta 0}K_{\eta 0}(EJ_x-EJ_y)D$	$-(K_{\eta 0}EC_w+x_MEJ_x+K_{\eta 0}y_M^2EJ_y)D^4 + K_{\eta 0}(GI+EJ_x-K_{\zeta 0}y_MEJ_y)D^2$	$-(K_{\zeta 0}EC_w+K_{\zeta 0}x_M^2EJ_x-y_MEJ_y)D^4 + K_{\zeta 0}(GI+K_{\eta 0}x_MEJ_x+EJ_y)D^2$	$-(EC_w+x_M^2EJ_x+y_M^2EJ_y)D^4 + (GI + 2K_{\eta 0}x_MEJ_x - 2K_{\zeta 0}y_MEJ_y)D^2 - (K_{\eta 0}^2EJ_x+K_{\zeta 0}^2EJ_y)$	$-m_\zeta - x_Mm_\xi' - y_Mm_\eta'$ $(D=d/ds)$ (7)

これが一般の場合の基礎方程式である。

特殊の場合として，部材の断面形が η 軸に関して対称で，かつ，η 軸が，変形前の軸線の主法線と一致する場合には，変位 v と w は，u と β に無関係に生じ，上式は次の二群に分れる。即ち，$\alpha = \pi/2$ とするとき，$K_{\eta 0} = 0$，$K_{\zeta 0} = K_0 = 1/R$，$x_M = 0$ から

$$-(EF + K_0^2EJ_x)w'' + K_0EJ_xv''' - K_0EFv' = q_\zeta + K_0m_\xi$$
$$K_0EJ_xw''' - K_0EFw - EJ_xv'''' - K_0^2EFv = -m_\xi' - q_\eta \qquad (8a)$$

$$-(K_0^2EC_w + EJ_y)u'''' + K_0^2GIu'' - (K_0EC_w - y_MEJ_y)\beta'''' + K_0(GI + EJ_y)\beta'' = m_\eta' - q_\xi$$
$$-(K_0EC_w - y_MEJ_y)u'''' + K_0(GI + EJ_y)u'' - (EC_w + y_M^2EJ_y)\beta'''' + (GI - 2K_0y_MEJ_y)\beta'' - K_0^2EJ_y\beta = -m_\zeta - y_Mm_\eta' \qquad (8b)$$

(8a) はいわゆる曲率面内での変位，(8b) は曲率面外への変形をあたえるものである。右辺の荷重項はもちろん，前者で，曲率面内に働く荷重，後者で，面外へのそれを表わす。

さらに，中立軸の軸方向の伸縮は微小であると仮定するときには (3) において $\varepsilon = 0$ として，(7) における未知量 w, v のうちいずれか一つを消去することができる。この場合の基礎式は紙面の都合で割愛するが，この場合にもまた，η 軸が対称軸で，かつ，軸線の主法線と一致するとき，基礎式は面内及び面外への変形を与える二群に分れる。すなわち，面内変位に関し，

$$-EJ_x(v^{V} + 2K_0^2v''' + K_0^4v') = -m_\xi'' - K_0m_\xi' - q_\eta' - K_0q_\zeta \qquad (9)$$

が得られ，一方面外変位に関しては (8b) と同形のものを得る。

なお，一軸対称断面において，$\alpha = 0$ とするときには，(8),(9) の式において，u と v が入れかわり，u が面内変位，v が面外変位を表わすことになる。