

京都大学工学部 正員 白石 成人

まえおき

つり橋の振動解析はつり橋の設計上最も重要なものの一つと考えられ、また、その挙動も複雑な様相を示す場合が多い。著者らは、これまで主として、理論的につり橋の自由振動を考察してきたが、計算を簡略化するためのいくつかの近似方法と、高次微小量を取り入れた場合の振動特性について研究したので、その結果を報告する。

自由振動基礎方程式の近似解

つり橋の自由振動は、大別して、鉛直たわみ型と、ねじれ型に分けられるが、後者は前者に比較して著しく複雑な方程式で表わされる。しかしながら、ハンガー反力のオー項のみを取り入れて線形化を行なえば、ねじれ型モードは、水平たわみモードと純ねじれモードになり、その計算は容易である。鉛直たわみ型モードについては、補剛析のたわみと w_0 、ケーブルの鉛直、水平たわみを W, u として慣用の符号を用いければ、次のように表わされる。

$$(EI_y w_0'')'' + 2Hw \frac{h''}{h} (w_0 - W) - \omega^2 \frac{W}{f} w_0 = 0 \quad (1)$$

$$\{EcAc(h'W - u')\}' - Hw\{h'(W + h'u')\}' + Hw \frac{h''}{h} u - \omega^2 \frac{W}{f} u = 0 \quad (2)$$

$$-\{EcAch'(h'W - u')\}' - Hw(W + h'u')' - Hw \frac{h''}{h} (w_0 - W) - \omega^2 \frac{W}{f} W = 0 \quad (3)$$

式(1)~(3)は w_0, W, u の3つのモードを連成することを示すので、いま

$$u = h \sin \varphi, \quad W = w_0 + \frac{h}{2} \sin^2 \varphi$$

のように近似し、線形項のみを取り上げれば、たわみ型の基礎方程式は次の=式になる。

$$(EI_y w_0'')'' - 2\{EcAc h'' + Hw\} w_0' - \omega^2 \left(\frac{W}{f} + \frac{2Hh}{f}\right) w_0 + 2(EcAc - Hw)(h'u')' = 0 \quad (4)$$

$$-\{EcAc + Hw h''\} u' + \frac{EcAch'}{h} u' - \omega^2 \frac{W}{f} u + \{EcAc - Hw\} h' w_0' = 0 \quad (5)$$

式(4),(5)は、それぞれ、式(1),(3)の組合せ、および式(2)を変形することによって求められるが、両者の相異点は式(2)のオ3項が、式(5)のオ2項 $(Hw \frac{h''}{h} u \rightarrow \frac{EcAch'}{h} u')$ のようになっていふことである。さて式(1),(2),(3)を用いて計算したものと、式(4),(5)を用いたものとを比較すれば、図1、2のようである。計算はモードを正弦関数の級数に展開し、その三項までを取り入れたが、図中実線は式(1)~(3)の解であり、実線は式(4),(5)の近似解である。つり橋は明石連絡橋が一次梁の主径間をとり、スパン中央はセンター・ステイによって、ケーブルと補剛析が結合されているものを対象としている。図1、2より、ケーブルの水平変位は、鉛直たわみの数倍に過ぎない。また自由振動数は、式(1)~(3)より求めた場合と式(4),(5)より求めた場合とではかなりの相異が認められる。

ねじれ型モードの基礎方程式は次のようである。

$$\frac{W_0}{2A} I \ddot{\theta} + (EI_{ym} b \theta'')'' - (GI \theta')' + \frac{b H w h''}{2A} \theta = 0 \quad (6)$$

$$\frac{W_0}{2} \ddot{w} - \{E c A c h'(u' - h' w')\}' - H w (w' + h' u')' - \frac{H w h''}{2} \left(\frac{b \theta}{A} - w\right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{W_0}{2} \ddot{u} - \{E c A c (u' - h' w')\}' - H w \{h'(w' + h' u')\}' + \frac{b H w h''}{2} u = 0 \quad (8)$$

たわみ型モードを求めたのと同じ手法を用いて計算すれば，図3のようであり，ケーブルの水平変位は，ケーブルの鉛直たわみの約20%程度となる。

振動型の非線形連成について

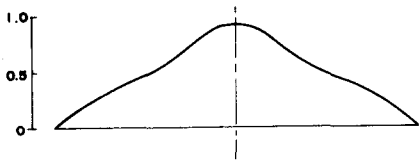
上の考察は線形基礎方程式を対象としたが，基本モードでは，ケーブルの水平変位はかなり小さく，ハンガーが伸まないという拘束条件についても，その影響は小さいと考えられる。そこで，拘束条件 $(V_0 - V_L)^2 + (h + w_0 + \frac{b \theta}{2} - w_L)^2 = h^2$ ， $(V_0 - V_R)^2 + (h + w_0 - \frac{b \theta}{2} - w_R)^2 = h^2$ において， $w_L = w_0 + \frac{b \theta}{2} + h(1 - \cos \alpha)$ ， $V_L = V_0 - h \sin \alpha$ ， $w_R = w_0 - \frac{b \theta}{2} + h(1 - \cos \beta)$ ， $V_R = V_0 - h \sin \beta$ のようにおき，二次の微小項まで考慮すれば，基礎方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (EI_{ym} w_0'')'' - 2Hw \left(\frac{w_0'}{1+h'^2} \right)' - 2 \left\{ \frac{E c A c h'^2 w_0'}{(1+h'^2)^{3/2}} \right\}' + \left(\frac{W_0}{2} + \frac{2W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} \right) w_0 - \frac{1}{2} L_{xt} \left\{ \frac{(V_0 - V_L)^2}{A} + \frac{(V_0 - V_R)^2}{A} \right\} &= 0 \\ -(EI_{ym} b \theta'')'' + (GI \theta')' + \frac{b^2}{2} \left\{ \frac{E c A c h'^2}{(1+h'^2)^{3/2}} \theta' \right\}' + \frac{b^2}{2} \left(\frac{H w \theta'}{1+h'^2} \right)' - \left(\frac{W_0 I}{2A} + \frac{4W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} \right) \theta'' + \frac{1}{2} L_{xt} \left\{ \frac{(V_0 - V_L)^2}{A} - \frac{(V_0 - V_R)^2}{A} \right\} &= 0 \\ \frac{W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} h'' V_L - H w h' V_L'' - H w h'' (V_0 - V_L) + (V_0 - V_L) L_{xt} (w_0 + \frac{b \theta}{2}) &= 0 \\ \frac{W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} h'' V_R - H w h' V_R'' - H w h'' (V_0 - V_R) + (V_0 - V_R) L_{xt} (w_0 - \frac{b \theta}{2}) &= 0 \\ (EI_L V_0'')'' + \frac{W_0}{2} V_0'' - H w (V_L'' + V_R'') + \frac{W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} (V_L' + V_R') &= 0 \end{aligned}$$

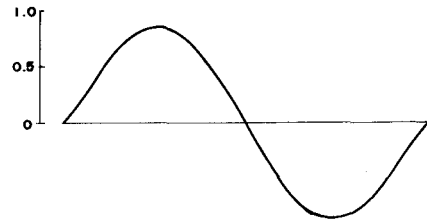
となる。ここに $L_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E c A c h'}{(1+h'^2)^{3/2}} + \frac{H w}{1+h'^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{W_0}{2} \sqrt{1+h'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ なる operator である。これらの式の解を数値的に求めることは極めて困難であるが，大きな変位によって，他の変位モードが励起されることは明かである。たとえば，水平たわみが大きくなると，鉛直たわみが，励起されるが，その逆の励起は起らない。前者の場合，鉛直たわみ振動数 ω_v と水平たわみ振動数 ω_h との間に $\omega_r = 2\omega_h$ なる関係があれば，発生し，一種の parametric oscillations と考えられる。また，同様のことは，ぬじれ振動数 ω_θ についても考えられるが，第2式より明かなように，ぬじれについては，鉛直たわみ振動の場合より，高次となるため，その連成度はより小さいと考えられる。

結 語

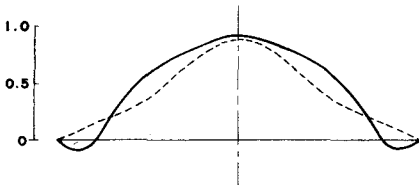
つり橋の自由振動は F. Bleich 等の誘導した基礎方程式で解析されるが，エネルギー論より求めれば，ぬじれ，たわみ振動をより統一的立場から，さらに明確にその抵抗の挙動を知ることができると考えられる。この場合，基礎方程式は多少複雑になるが，電子計算機を用いれば，その数値解析は容易である。非線形挙動については今後研究されなければならぬが，ここでは動力学的に，parametric oscillation の可能性について考察を加えた。



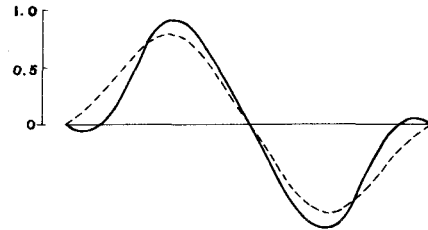
vertical mode of stiffening girder



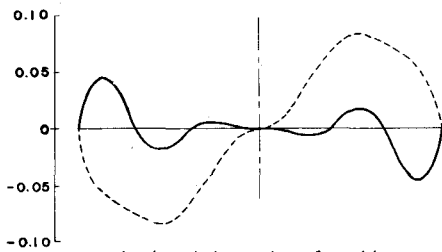
vertical mode of stiffening girder



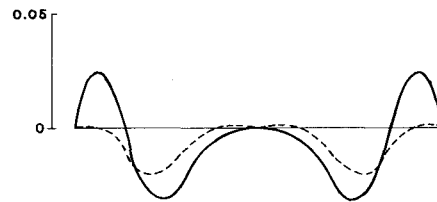
vertical mode of cable



vertical mode of cable



horizontal mode of cable



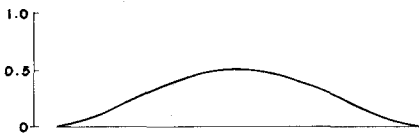
horizontal mode of cable

Symmetric Deflectional Mode (with center stay)

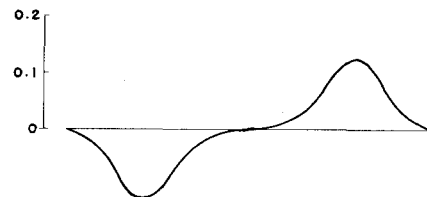
④ 1

Antisymmetric Deflectional Mode (with center stay)

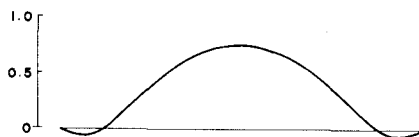
④ 2



torsional mode of stiffening girder



horizontal mode of cable



deflectional mode of cable

Symmetric Torsional Mode (with center stay)

④ 3