I～2

応力波の透過に関する考察

京都大学工学部　正員　丹羽 義次
京都大学工学部　正員　○佐藤 誠

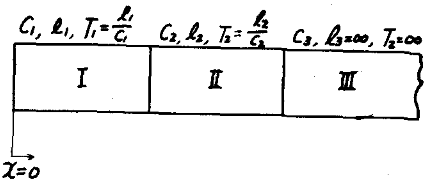
1. まえがき

筆者らは前回の九州における年次学術講演会において，軸方向に比較的低速度の衝撃を受ける棒構造を対象として，弾性理論による St. Venant の棒の縦衝撃に対する解と実験結果とを比較検討した。

ここでは同じく軸方向に衝撃を受ける多層の棒構造を対象にし，応力波の透過，反射を考慮して弾性理論による解を求め実験結果と比較する。

2. 不連続面が存在する場合の棒の応力伝播

いま衝撃端を原点として右図のような不連続面を有する多層棒を考える。各層の縦波の伝播速度，層の長さ，伝播時間は図に示した通りである。



α_{ij}を層iから層jへ反射する場合の反射係数，β_{ij}を層iから層jへ透過する場合の透過係数とする，またf_iを層iにおける進行波，g_iを層iにおける後退波とすると，層iにおける変位u_iは　$u_i=f_i(c_it-x)+g_i(c_it+x)$　である。

つぎに$f_i(z)$，$g_i(z)$とおいてzの各区間におけるf_i，g_iを求める。但し$c_i/c_j=k_{ij}$とする。

g_1について，

$0\leqq z<2l_1$: $g_1(z)=0$.

$2l_1\leqq z<2l_1+2k_{12}l_2$: $g_1(z)=\alpha_{21}f_1(z-2l_1)$.

$z\geqq 2l_1+2k_{12}l_2$: $g_1(z)=\alpha_{21}f_1(z-2l_1)+\beta_{21}g_2\{k_{21}z+(1-k_{21})l_1\}$.

g_2について，

$z<(1+k_{21})l_1+2l_2$: $g_2(z)=0$.

$z\geqq(1+k_{21})l_1+2l_2$: $g_2(z)=\alpha_{32}f_2(z-2l_1-2l_2)$.

f_2について，

$z<(k_{21}-1)l_1$: $f_2(z)=0$.

$(k_{21}-1)l_1\leqq z<(k_{21}-1)l_1+2l_2$: $f_2(z)=\beta_{12}f_1\{k_{12}z+(k_{12}-1)l_1\}$.

$z\geqq(k_{21}-1)l_1+2l_2$: $f_2(z)=\beta_{12}f_1\{k_{12}z+(k_{12}-1)l_1\}+\alpha_{12}g_2(z+2l_1)$.

f_3について，

$z<(k_{31}-1)l_1+(k_{32}-1)l_2$: $f_3(z)=0$.

$z\geqq(k_{31}-1)l_1+(k_{32}-1)l_2$: $f_3(z)=\beta_{23}f_2\{k_{32}z+(k_{23}-1)(l_1+l_2)\}$.

上に求めたf_i，g_iからg_1，g_2，f_2，f_3をそれぞれf_1のみの関数として表わす。

g_1について，

$0\leqq z<2l_1$: $g_1(z)=0$.

$2l_1\leqq z<2l_1+2k_{12}l_2$: $g_1(z)=\alpha_{21}f_1(z-2l_1)$.

$2l_1+2k_{12}l_2\leqq z<2l_1+4k_{12}l_2$: $g_1(z)=\alpha_{21}f_1(z-2l_1)+\beta_{12}\alpha_{32}\beta_{21}f_1(z-2l_1-2k_{12}l_2)$.

以下同様にして$2k_{12}l_2$ずつ区間を分けて求めることができる。

g_2について，

$z<(k_{21}+1)l_1+2l_2$: $g_2(z)=0$.

$$(k_{21}+1)l+2l_2 \leqq z < (k_{21}+1)l_1+4l_2 \quad : \quad g_2(z) = g_{12}\alpha_{32} f_1\{k_{12}z-(1+k_{12})l_1-2k_{12}l_2\}.$$

f_2について、 $z < (k_{21}-1)l_1 \ : \ f_2(z)=0.$

$$(k_{21}-1)l_1 \leqq z < (k_{21}-1)l_1+2l_2 \ ; \ f_2(z)=\beta_{12}f_1\{k_{12}z+(k_{12}-1)l_1\}.$$

f_3について、 $z < (k_{31}-1)l_1+(k_{32}-1)l_2 \ : \ f_3(z)=0.$

$$(k_{31}-1)l_1+(k_{32}-1)l_2 \leqq z < (k_{31}-1)l_1+(k_{32}-1)l_2+2l_2.$$

$$f_3(z)=\beta_{12}\beta_{23}f_1\{k_{13}z-(k_{12}-k_{13})(l_1+l_2)+(k_{12}-1)l_1\}.$$

g_2, f_2, f_3はいずれも$2l_2$ずつに区間を分けて同様に求めることができる。

以上f_1以外のものはすべてf_1のみの関数で表わされることがわかった。したがってf_1が既知であればg_1, g_2, f_2, f_3, はすべて決まる。

つぎに$f_1(z)$を具体的な関数として与える。

Lagrange の衝撃方程式より

$$-\int_0^t E_1A_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}dt = m_{2,0}\left[v_{2,0}-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=0}\right].$$

ここに、E_1, A_1は層Ⅰの弾性係数および断面積であり、$m_{2,0}$, $v_{2,0}$は衝撃体の質量および衝撃速度である。

上式に $u_1=f_1(c_1t-x)+g_1(c_1t+x)$ を代入し、$m=\rho_1A_1/m_{2,0}$, $v=v_{2,0}/c_1$, $z=c_1t$ としてまとめると、

$$f_1(z)=\frac{v}{m}(1-e^{-mz})+e^{-mz}\int_0^z e^{mz}[g_1'(z)-mg_1(z)]dz.$$

ここで、$g_1(z)$は前に述べたように $2(n-1)l_1 \leqq 2k_{12}l_2 < 2nl_1$ (nは任意の整数) について$f_1(z)$のみの関数として求めることができる。

たとえば、$0 \leqq 2k_{12}l_2 < 2l_1$、の場合

$$0 \leqq z < 2l_1 \ : \ f_1(z)=\frac{v}{m}(1-e^{-mz}) \equiv f_1^0(z).$$

$$2l_1 \leqq z < 2l_1+2k_{12}l_2 < 4l_1 \ : \ f_1(z)=f_1^0(z)+\alpha_{21}\frac{v}{m}\left[-1+\{1+2m(z-2l_1)\}e^{-m(z-2l_1)}\right] \equiv f_1^1(z).$$

$$2l_1+2k_{12}l_2 \leqq z < 4l_1 \ : \ f_1(z)=f_1^1(z)+g_{12}\alpha_{32}\beta_{21}\frac{v}{m}\left[-1+\{1+2m(z-2l_1-2k_{12}l_2)\}e^{-m(z-2l_1-2k_{12}l_2)}\right]$$
$$\equiv f_1^2(z).$$

$4l_1 \leqq z < 2l_1+4k_{12}l_2$:

$$f_1(z)=f_1^2(z)+\beta_{12}\alpha_{32}\beta_{21}\frac{v}{m}\left[-1+\{1+2m(z-2l_1-2k_{12}l_2)\}e^{-m(z-2l_1-2k_{12}l_2)}\right]$$

以下同様にして順次$f_1(z)$を決定することができる。

$g_1(z)$, $g_2(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ については前に$f_1(z)$のみの関数として表わしたから、それらに上で求めた$f_1(z)$の関数を代入することにより決定することができる。

なお実際の多層棒についての計算結果およびその実験結果との比較は講演当日発表する。