IV—8　ネットワークにおけるマルコフ理論の応用

京都大学　正員　香川一男

マルコフ過程の理論はネットワークにおけるフローの問題をはじめ，シャノン線図で表現されるすべてのシステムに応用されている。ここでは，利得のあるプロセスについて考えてみる いまN個の地点からなる地域を，ある車が一定の推移確率をもって運行する場合を考えると，このようなネットワークにおける運行の過程は，マコルコフの鎖をなしている行動システムと考えられる。そのとき，1回の推移ごとに利得（または損失）が生ずるものとすると n 回の推移でえられる期待利得および無限回の推移における平均期待利得をマルコフ過程応用として計算することができる。また，毎回の推移の結果をみて，ある可能な行動 $a_1, a_2, \cdots a_M$ のうち1つの a_k をとると，その行動に応じて，地点 i から j へ移る推移確率 p_{ij}^{k} および利得 r_{ij}^{k} がわかっているとする。さらに，地点 i にあれば行動 a_{k_i} をとるということを $\nu=(k_1, k_2, \cdots k_N)$ で表わし，これを1つの戦術と呼ぼう。すると1つの戦術 ν をきめると，推移確率の行列 $P(\nu)=(p_{ij}^{k_i})$ および利得の行列 $R(\nu)=(r_{ij}^{k_i})$ が求まり，したがって，1回当りの利得 $g(\nu)$ が求まる。ここで，各段階ごとにとるべき戦術を並べた $\{\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n, \cdots\}$ を1つの政策 π と呼ぶことにする。そのとき，ある政策 π から出発して，最適政策 π^* に達するための手順について考えよう。以下，本文発表に必要な数学的事項を略記してみよう。

いま，簡単のために，このシステムの推移確率行列が正則，つまり，このマルコフ過程がエルゴード的であるとしよう。そして，この行列の固有値が単根，かつ，実根の場合について考えることにする。自然数の関数 $f(n)$ があたえられているとき，この関数の母関数を
$\mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$　　(1)　　で定義する。ここに，変数 z は上の級数が収束するような範囲で考える。　$f(n)=1,\quad n=0,1,2,\cdots$　　(2)　　の母関数 $\mathcal{F}(z)$ は (1) から，　$\mathcal{F}(z)=1+z+z^2+\cdots\cdots = 1/(1-z)$　　(3)　　ここで，左の級数は $-1<z<1$ で収束することが知られている。一般に，巾級数に関する定理から，収束半径を求めることができる。以下では，収束する範囲の z で考えて，形式的な計算で満足することにする。　$f(n)=\alpha^n,\quad n=0,1,2,\cdots$　　(4)　　のときは，

$\mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n = \frac{1}{1-\alpha z}$　　ところで，形式的に　$\frac{d}{dz}\mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n z^{n-1}$　　であり，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n z^n = z\frac{d}{dz}\mathcal{F}(z) = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right) = \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2} \qquad (5)$$

であるから，

$f(n)=n\alpha^n$ の母関数は $\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$ となる。また，$f(n)$ とその母関数 $\mathcal{F}(z)$ があたえられたとき，$f(n+1)$ の母関数は $\sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m) z^{m-1} = \frac{1}{z}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m) - f(0)\right]$
$= z^{-1}[\mathcal{F}(z)-f(0)]$　　(6)　　である。反対に，母関数 $\mathcal{F}(z)$ があたえられると，z について展開した z^n の係数を $f(n)$ とすれば，もとの関数 $f(n)$ が求まる。そこで，以下では，母関数 $\mathcal{F}(z)$ を $f(n)$ の z ー変換，逆に，$\mathcal{F}(z)$ から $f(n)$ を求めることを $\mathcal{F}(z)$ の逆変

換と呼ぶ。

ここで，可能な状態の数がN個である系について，n 回の推移をしたあとでの系の確率ベクトルを $p(n)$，$n+1$ 回の推移をしたあとでの系の確率ベクトルを $p(n+1)$ とし，推移確率行列をPとすると， $p(n+1)=p(n)P$ (7) なる関係がある。確率ベクトルの成分を一般に $[p(n)]_j$，$[p(n+1)]_j$ などと書き，また，Pの要素を一般に p_{ij} と書くと，(7)式は $[p(n+1)]_j=\sum_{i=1}^{N}[p(n)]_i p_{ij}$ ，$j=1,2,\cdots\cdots,N$ (8) である。

一方，$[p(n)]_i$ の母関数を $[\mathscr{P}(z)]_i$ と書くことにすると，(8)式の左辺の母関数は，$z^{-1}([\mathscr{P}(z)]_j-[p(0)]_j)$ となり，また，右辺の母関数は $\sum_{i=1}^{N}[\mathscr{P}(z)]_i p_{ij}$ となるから，$z^{-1}([\mathscr{P}(z)]_j-[p(0)]_j)=\sum_{i=1}^{N}[\mathscr{P}(z)]_i p_{ij}$ (9) となる。ここで，確率ベクトル $p(n)$ の母関数 $\mathscr{P}(z)$ を $\mathscr{P}(z)=([\mathscr{P}(z)]_1,[\mathscr{P}(z)]_2,\cdots\cdots[\mathscr{P}(z)]_N)$ と定義すると，(8)式の母関数の関係(9)は結局，$z^{-1}(\mathscr{P}(z)-p(0))=\mathscr{P}(z)P$ (10) となる。(10)式を変形すると，$\mathscr{P}(z)-z\mathscr{P}(z)P=p(0)$ すなわち，$\mathscr{P}(z)[E-zP]=p(0)$ となることから，

$\mathscr{P}(z)=p(0)[E-zP]^{-1}$ (11) をうる。よって，母関数 $\mathscr{P}(z)$ を級数展開することによって $p(n)$ がもとめられるが，そのためには，$[E-zP]^{-1}$ の展開をしなければならない。

$[E-zP]^{-1}$ は形式的に $|E-zP|\neq 0$ とおけるから，

$$[E-zP]^{-1}=\frac{\operatorname{adj}[E-zP]}{|E-zP|} \qquad (12)$$

ここに，$\operatorname{adj}[E-zP]^{-1}$ は $[E-zP]$ における余因子行列である。

いま，Pの固有値を $\alpha_i(\neq 0)$ とすると，$Px=\alpha_i x$ なる固有ベクトル $x(\neq 0)$ が存在するから，$1/\alpha_i Px=x$，ゆえに，$1/\alpha_i$ は $|E-zP|=0$ の根になる。さて，われわれは，さきに，Pの固有値が単根で，かつ実根であると仮定したから，部分分数分解の公式により，(12)式はつぎのように部分分数展開ができる。すなわち，

$$[E-zP]^{-1}=\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i}{1-\frac{1}{\lambda_i}z}$$

ここに，Z_i は z ふくまないN次正方行列，λ_i はPの固有値の逆数である。

また，Pは1なる固有値をもつから，$\lambda_1=1$ とおいて，

$$[E-zP]^{-1}=\frac{Z_1}{1-z}+\sum_{i=2}^{N}\frac{Z_i}{1-\frac{1}{\lambda_i}z} \qquad (13)$$

となるから，(11)式に代入して，$\mathscr{P}(z)=p(0)\left(\frac{Z_1}{1-z}+\sum_{i=2}^{N}\frac{Z_i}{1-\frac{1}{\lambda_i}z}\right)$ をうるから，この逆変換をとると，$p(n)=p(0)\left(Z_1+\sum_{i=2}^{N}Z_i\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^n\right)=p(0)\left(Z_1+\sum_{i=2}^{N}Z_i\alpha_i^n\right)$ (14) をうる。

フロベニウスの定理によれば，正則なマルコフ過程では，1なる固有値以外のすべての固有値の絶対値は1より小であるから，n の増大につれて，$\alpha_i^n\longrightarrow 0$ であり，したがって，$p(n)\longrightarrow p(0)Z_1$ がいえる。ここに，Z_1 は固有値1に属する固有ベクトルからなるN次の正方行列である。