I−7　吊橋の空気力学的応答に関する研究

京都大学工学部　正員　○白石成人
京都大学大学院　学生員　宇都宮英彦

1° まえがき

吊橋は近年わが国において活発に研究されはじめている。この構造物はとくに動的に揺れ易く，したがって風荷重に対して充分な安全性が確保されなければならない。　F. Bleich らはこの問題を最初に手がけ，いわゆる流体中にある平板に関する Lift および Torque Moment を吊橋に応用して限界風速を算定した。この理論解は，周知のとおり，Theodorsen 関数に立脚するもので，問題の取り扱いはすべて二次元的になされている。さて，吊橋は本来極めて長径間にわたり，風速も当然場所場所によって異ることが期待される。また，風荷重としては Gust Load のように局部的に風速の大きいものも考えられ，吊橋の空気力学的応答も，荷重の場所的変動を考慮する必要があろう。ここでは，以上の立場から，最も簡単な 2,3 の場合について，理論的に考察を行ったものである。

2° 考　察

F. Bleich[1] にある記号を用いれば，Lift および Torque Moment は

$$L = -sV^2\left[f_1\left(\phi + \frac{b}{V}\dot{\eta}\right) + f_2\frac{b}{2V}\dot{\phi}\right] \tag{1}$$

$$M = \frac{sbV^2}{2}\left[f_1\left(\phi + \frac{b}{V}\dot{\eta}\right) - f_3\frac{b}{2V}\dot{\phi}\right] \tag{2}$$

のように与えられる。　式(1) および 式(2)は仮定より明らかなように，二次元流れに関するものであり，Aspect Ratio ∞に相当することになる。Rが小さくなると(通常5以下)もはや上式による外力の決定はできない。　小さいRについては lift curve slop を修正するのが一般にとられている方法であるが，吊橋を対象とする場合，Rは 10～40 であると考えられ，この場合 Lift ならびに Torque Moment に関するRの修正は，極めて小さいものと考えられる。

そこで，式(1), (2)を第一近似としてそのまま用い，かつ風が局所に作用するとする場合，限界風速の算定法を以下に考察する。　前と同様の記号[1]を用いれば，基礎方程式は次の二式で与えられる。

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1\int_L \Phi_1^2\,dx + \frac{sbV^2}{mb^2}\left\{f_1 q_2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1\Phi_2\,dx + f_1\frac{b}{V}\dot{q}_1\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1^2\,dx + f_2\frac{b}{2V}\dot{q}_2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1\Phi_2\,dx\right\} = 0 \tag{3}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2\int_L \Phi_2^2\,dx - \frac{sbV^2}{2mr^2}\left\{f_1 q_2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_2^2\,dx + f_1\frac{b}{V}\dot{q}_1\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1\Phi_2\,dx - f_3\frac{b}{2V}\dot{q}_2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_2^2\,dx\right\} = 0 \tag{4}$$

ここで，Φ_1, Φ_2 は正規化された，たわみ振動型およびねじれ振動型であり，q_1, q_2 はそれぞれの Lagrange 関数である。　また $\int_L$ は全径間に対する積分を表わし，α_1, α_2 は風速の作用する区間を表わす parameter である。

式(3)，および式(4)について，

$$D_{11}=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1^2\,dx\,,\qquad D_{12}=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_1\Phi_2\,dx\,,\qquad D_{22}=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Phi_2^2\,dx \tag{5}$$

とし，$g_1=C_1e^{i\omega t}$，$g_2=C_2e^{i\omega t}$ を式(3)，(4)に代入して特性方程式を求めれば，

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2-\omega^2+i\omega\left(\frac{\rho bV^2}{mb^2}\right)\left(f_1\frac{b}{V}D_{11}\right) & \left(\frac{\rho bV^2}{mb^2}\right)f_1D_{12}+i\omega\left(\frac{\rho bV^2}{mb^2}\right)\left(\frac{f_2b}{2V}\right)D_{12} \\ -i\omega\left(\frac{\rho bV^2}{2mr^2}\right)\left(\frac{f_1b}{V}D_{12}\right) & \omega_2^2-\omega^2-\left(\frac{\rho bV^2}{2mr^2}\right)f_1D_{22}+i\omega\left(\frac{\rho bV^2}{2mr^2}\right)\left(\frac{f_3b}{2V}\right)D_{22} \end{vmatrix}=0$$

のようになる。　この式は虚数項を含むため，実数項，虚数項ともに零にならなければならないから，上式を展開すれば，結局

$$\begin{aligned}&\omega^4\Big[\Big\{1+Sf_{1i}kD_{11}\Big\}\Big\{1+\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2D_{22}\left(f_{1R}+\frac{k}{2}f_{3R}\right)\Big\}+\frac{1}{2}S^2f_{1R}kD_{11}D_{22}\left(\frac{b}{r}\right)^2\left(f_{1i}-\frac{k}{2}f_{3i}\right)\\&-\frac{1}{2}SkD_{12}^2\left(\frac{b}{r}\right)^2\Big\{f_{1R}\left(f_{1i}+\frac{k}{2}f_{2i}\right)+f_{1i}\left(f_{1R}+\frac{k}{2}f_{2R}\right)\Big\}\Big]\\&-\omega^2\Big[\omega_1^2\Big\{1+\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2D_{22}\left(f_{1R}+\frac{k}{2}f_{3R}\right)\Big\}+\omega_2^2\left(1+Skf_{1i}D_{11}\right)\Big]+\omega_1^2\omega_2^2=0\end{aligned} \tag{6}$$

が実数項として求められ，虚数項としては，

$$\begin{aligned}&\omega^2\Big[\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2kD_{12}^2\Big\{f_{1R}\left(f_{1R}+\frac{k}{2}f_{2R}\right)-f_{1i}\left(f_{1i}+\frac{k}{2}f_{2i}\right)\Big\}+\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2D_{22}\left(f_{1i}-\frac{k}{2}f_{3i}\right)\left(1+Sf_{1i}kD_{11}\right)\\&-Skf_{1R}D_{11}\Big\{1+\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2D_{22}\left(f_{1R}-\frac{k}{2}f_{3R}\right)\Big\}\Big]+Sf_{1R}kD_{11}\omega_2^2-\frac{S}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2D_{22}\left(f_{1i}-\frac{k}{2}f_{3i}\right)\omega_1^2=0\end{aligned} \tag{7}$$

が求められる。

ここで，$S=\frac{\rho b}{mk^2}$ であり $k=\frac{\omega b}{V}$，$f_1=f_{1R}+if_{1i}$，$f_2=f_{2R}+if_{2i}$，$f_3=f_{3R}+if_{3i}$ である。式(6)は ω^2 に関して２次式であるが，式(7)は１次式であるから，まず k を仮定して ω^2 を式(7)より求め，これを式(6)に代入して，その左辺が零となるように定めれば，所要の限界値 k および ω^2 が算出される。

3° むすび

この研究は，吊橋の空気力学的応答についての一つの理論的解析であり，三次元問題への最も低次の近似解を求めようとしたものである。　式(6)，(7)においては，風はある一区間に一様に流れるものとしているが　もし風が Spanwise に変動することがあっても，その変動の度合が小さければ，同様の手法によって近似しうるものと考えられる。

文献

1)　F. Bleich, etc　The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges. Dept. of Commerce, U.S.A　1950,　P 241～P 268

2)　Y.C Fung,　An Introduction to the Theory of Aeroelasticity,　John Wiley & Sons. 1955,　P 126、