Ⅱ－16　一文字堤による波浪の回折

神戸大学工学部　正員　杉本修一

一文字堤による波浪の回折は、現在は、一本の半無限長半島堤による波浪の回折に対する解、すなわち、光が一本の半無限長板の尖端において回折する現象に対するSommerfeldの解を2つ重ね合せて近似的に表現しているようである。

しかしながら、一文字堤の周囲においてどのようなところで、砂が洗掘され、あるいは堆積されるのか、また波はどのようなところで高くなるのか、あるいは低くなるのか？というようなことについて厳密に考えるときには、このような近似計算は許されなくなる。

光や音の回折理論では一直線の線長に対して波の波長が極度に大きいか、あるいは小さいので近似計算が許される。しかるに一文字堤によって波浪が回折される場合には一文字堤の長さと波の波長が大体同じぐらいのorderである場合があり、このようなときには近似計算は許されなくなり、厳密な計算を必要とする。

筆者は第18回土木学会年次学術講演会（昭和38年5月25日）において、水深が等しい場合に対して楕円堤による平面波の回折問題について波動方程式を解析的に解き、その解析解に基いて入射する平面波の方向が楕円長軸に対して平行、45°および直角の3つの場合につき数値計算を行った結果を発表した。

直線は楕円の極限であることに着目して、一文字堤による波浪の回折を、楕円堤の場合の解を用いて、その一つの極限として解を求めた。

長波については静水面よりの水位上昇を ζ とすれば

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g d \, \nabla^2 \zeta . \qquad （ここに\ d\ は等水深）$$

が成立する。さらに $\zeta = \varphi \cdot e^{i\sigma t}$ として楕円坐標

$$x + iy = c \cdot \cosh(\xi + i\eta) = (c\,\mathrm{ch}\,\xi \cos\eta) + i(c\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\eta). \qquad (1)$$

を用うれば

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\sigma^2 c^2}{2gd}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\varphi = 0 \qquad (2)$$

となる。そこで $\varphi = F(\xi) \cdot G(\eta)$ であるとすれば変数分離ができて

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} - (A - 2q\,\mathrm{ch}\,2\xi)F = 0. \cdots \quad (3) \qquad \frac{d^2G}{d\eta^2} + (A - 2q\cos 2\eta)G = 0. \cdots \quad (4)$$

を得る。これらの式を解けば解が得られる。一文字堤は式(1)において $\xi = 0$ とすれば得られる。このように考えれば、あとは楕円堤の場合と同様に進めてゆけばよい。本概要を理解するために前回報告と重複はするが楕円堤の場合についての考え方を以下に説明する。

式(4)はMathieuの方程式と称せられていてその解はMathieu関数 ce_i と se_i との和。

$$G(\eta) = A_0 + \alpha_1 \cdot ce_1 + \alpha_2 \cdot ce_2 + \cdots + \beta_1 \cdot se_1 + \beta_2 \cdot se_2 + \cdots = A_0 + \sum A_s \cos s\eta + \sum B_s \sin s\eta . \qquad (5)$$

$F(\xi)$ はよく知られているように指数関数で表わされるが $F(\infty) = 0$ でなければならぬゆ

えf_2およびf_3をある常数としてつぎの如く假定する。

$$F(\xi) = e^{-\xi} + f_2 e^{-2\xi} + f_3 e^{-3\xi}. \qquad (6)$$

この式のf_2およびf_3は変分学の原理に基いてある積分値が最小となる如く定めることによって求められる。

入射波の方向が長軸に対して⊕θ傾いているとすれば無限遠における入射波のψ_1は

$$\psi_1 = \mathcal{R}_e \cdot e^{ikc(ch\xi\cos\eta\cos\theta + sh\xi\sin\eta\sin\theta)}. \qquad (7)$$

茲に $\mathcal{R}_e$ は実部を表示する

いま

$$\tan\xi_0 = \tanh\xi\tan\theta. \quad p^2 = ch^2\xi\cos^2\theta + sh^2\xi\sin^2\theta. \qquad (8)$$

$$\psi_1 = \mathcal{R}_e \cdot e^{ikcp\cos(\xi_0-\eta)} = \mathcal{R}_e \cdot \left[J_0(kcp) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kcp)\cos n(\xi_0-\eta)\right].$$

$$= J_0(kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(kcp)\cos 2m\xi_0\cos 2m\eta + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(kcp)\sin 2m\xi_0\sin 2m\eta. \qquad (9)$$

一文字堤によって回折散乱を受ける波浪は入射波のψ_1と散乱波のψ_2との和である。

$$\psi = \psi_1 + \psi_2.$$

$$\psi_1 = \text{式}(9), \qquad \psi_2 = F(\xi)\cdot\left\{A_0 + \sum A_{2m}\cos 2m\eta + \sum B_{2m}\sin 2m\eta\right\}. \qquad (10)$$

一文字堤の境界をξ_0とすれば，境界上においては

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]_{\xi_0} = \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\right]_{\xi_0} + \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\right]_{\xi_0} = 0. \qquad (11)$$

を満足せねばならぬ。この条件より$A_0, A_2, A_4, A_6 \cdots B_2, B_4, B_6$　を求むれば

$$A_0 = -\frac{\{J_0(kcp)\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_1)$$

$$A_2 = +2\frac{\{J_2(kcp)\cos 2\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_2)$$

$$B_2 = +2\frac{\{J_2(kcp)\sin 2\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_3)$$

$$A_4 = -2\frac{\{J_4(kcp)\cos 4\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_4)$$

$$B_4 = -2\frac{\{J_4(kcp)\sin 4\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_5)$$

$$A_6 = +2\frac{\{J_6(kcp)\cos 6\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_6)$$

$$B_6 = +2\frac{\{J_6(kcp)\sin 6\xi_0\}'_{\xi_0}}{F'(\xi)_{\xi_0}}. \qquad (12_7)$$
