I－12　軸力と面外等分布荷重を受ける曲線桁の座屈について

大阪大学　正員　安宅　勝
〃　○　〃　波田凱夫

この研究の目的は、図1.に示した様な、軸力Nと、桁軸を含む面に垂直な等分布荷重pを受ける円弧アーチの応力状態を求めることである。一般にアーチの軸力Nは、中心角αの関数であるが、この報告では、比較的扁平なアーチに問題を限ることとし、Nを一定と仮定して、基礎方程式を導いている。式の誘導に際しては、水平方向の変位Zと軸力Nとの積によって与えられる二次的なモーメントN·Zを、応力の釣合条件に加えたが、他の断面力に及ぼされる変位の影響は考慮していない。またアーチ断面の曲げ捩り剛性を省略している。以下の理論を応用することによって、一般にNが中心角αの関数である場合及び、アーチ断面の曲げ捩り剛性を考慮した場合についても、基本式を誘導することは容易である。

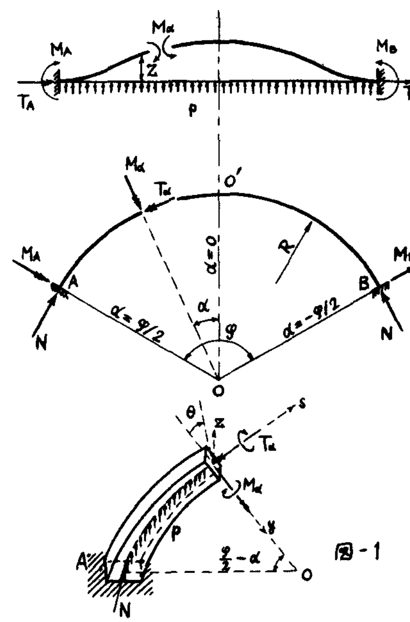

図-1

さて、図1において、記号はすべて正方向を表しているものとするとき、アーチ軸線の曲げモーメントと捩りモーメントは次式で与えられる。

$$(1)\qquad M_\alpha = -EJ\left(\frac{1}{R^2}\cdot\frac{d^2Z}{d\alpha^2} - \frac{\theta}{R}\right),\quad T_\alpha = GI\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{1}{R^2}\cdot\frac{dZ}{d\alpha}\right)$$

ここに，EJは曲げ剛性（y軸まわり），GIはねじり剛性である。更に断面力及び荷重の間には、微小要素を考えるとき、次の関係がある。

$$(2)\qquad \frac{dQ_\alpha}{ds} - p = 0,\quad \frac{dT_\alpha}{d\alpha} = M_\alpha,\quad \frac{dM_\alpha}{d\alpha} = -T_\alpha - pR^2\alpha + N\frac{dZ}{d\alpha}$$

（Q_αはZ方向の剪断力）

これらの式より、曲げモーメントM_αはθの関数として表わされ、

$$(3)\qquad M_\alpha = R\cdot\frac{K_b K_t}{K_b+K_t}\cdot(\theta''+\theta)\qquad \left(K_b = \frac{EJ}{R^2},\ K_t = \frac{GI}{R^2},\ \theta'' = \frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\right)$$

更に、θに関する微分方程式が得られる。即ち、

$$(4)\qquad \frac{d^4\theta}{d\alpha^4} + \left(2+\frac{N}{K_b}\right)\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \left(1-\frac{N}{K_t}\right)\theta = -\frac{K_t+K_b}{K_t K_b}\cdot pR$$

この微分方程式の一般解は次の様に得られる。

i) $1 - N/K_t > 0$ の場合

$$\theta = A\sin k_1\alpha + B\cos k_1\alpha + C\sin k_2\alpha + D\cos k_2\alpha + \frac{K_t+K_b}{K_b(N-K_t)}\cdot pR$$

（θの対称性より$A=C=0$）

ここに　$k_1=\sqrt{\left\{2+\frac{N}{K_b}+\sqrt{4N\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_t}\right)+\frac{N^2}{K_b^2}}\right\}\Big/2}$,　$k_2=\sqrt{\left\{2+\frac{N}{K_b}-\sqrt{4N\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_t}\right)+\frac{N^2}{K_b^2}}\right\}\Big/2}$

ii) $1-N/K_t<0$ の場合

$$\theta=B\cos k_1\alpha+D\cosh k_2\alpha+\frac{K_b+K_t}{K_b(N-K_t)}pR$$

ここに　$k_1=\sqrt{\left\{2+\frac{N}{K_b}+\sqrt{4N\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_t}\right)+\frac{N^2}{K_b^2}}\right\}\Big/2}$,　$k_2=\sqrt{\left\{\sqrt{4N\left(\frac{1}{K_b}+\frac{1}{K_t}\right)+\frac{N^2}{K_b^2}}-2-\frac{N}{K_b}\right\}\Big/2}$

境界条件：$\alpha=0$ にて $z'=0$, $\alpha=\varphi/2$ にて $\theta=0,\ z=0,\ z'=0$ を用いると、B及びDが決定される。

$1-N/K_t>0$ の場合

(5)　$$B=\frac{K_t+K_b}{N-K_t}pR\cdot\frac{\left(\frac{1}{k_2}+mk_2\right)\sin\frac{k_2\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\cos\frac{k_2\varphi}{2}}{F(k_1,k_2)},\quad D=-\frac{K_t+K_b}{N-K_t}pR\cdot\frac{\left(\frac{1}{k_1}+mk_1\right)\sin\frac{k_1\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\cos\frac{k_1\varphi}{2}}{F(k_1,k_2)}$$

(6)　$$F(k_1,k_2)=\left(\frac{K_b}{k_1}+k_1K_t\right)\sin\frac{k_1\varphi}{2}\cos\frac{k_2\varphi}{2}-\left(\frac{K_b}{k_2}+k_2K_t\right)\sin\frac{k_2\varphi}{2}\cos\frac{k_1\varphi}{2},\quad m=K_t/K_b=GI/EJ$$

(7)　$$k_1^2+k_2^2=2+m(1-k_1^2k_2^2)$$

$1-N/K_t<0$ の場合

(8)　$$B=\frac{K_t+K_b}{N-K_t}pR\cdot\frac{\left(\frac{1}{k_2}-mk_2\right)\sinh\frac{k_2\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\cosh\frac{k_2\varphi}{2}}{G(k_1,k_2)},\quad D=-\frac{K_t+K_b}{N-K_t}pR\cdot\frac{\left(\frac{1}{k_1}+mk_1\right)\sin\frac{k_1\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\cos\frac{k_1\varphi}{2}}{G(k_1,k_2)}$$

(9)　$$G(k_1,k_2)=\left(\frac{K_b}{k_1}+k_1K_t\right)\sin\frac{k_1\varphi}{2}\cosh\frac{k_2\varphi}{2}-\left(\frac{K_b}{k_2}-k_2K_t\right)\cos\frac{k_1\varphi}{2}\sinh\frac{k_2\varphi}{2}$$

(10)　$$k_1^2-k_2^2=2+m(1+k_1^2k_2^2)$$

さて、軸力Nが順次増大してゆき、式(6)又は(9)の F, G が0となる瞬間において、ねじれ角 θ の値は不定となり、従ってこの様な N_{cr} が限界軸力を与えるものとなる。これは丁度、横荷重と軸力を受ける直線圧縮材の座屈性状に似ている。N_{cr} を求めるには、

$1-N/K_t>0$ の場合、(6)において $F(k_1,k_2)=0$, 及び(7)より、k_1, k_2, 従って N_{cr} が

(11)　$$N_{cr}=K_t(k_2^2-1)^2/(1+mk_2^2)$$

として与えられ、更に

$1-N/K_t<0$ の場合　(9)及び(10)より

(12)　$$N_{cr}=K_t(k_2^2+1)^2/(1-mk_t^2)$$

となる。一般に、$F(k_1,k_2)=0$ 及び(7)式，或は $G(k_1,k_2)=0$ と(10)式を連立に解くのは困難であるから、図式的に両曲線の第一交点をとればよい。

最後に、曲げ捩り剛性 EC_w を考慮した場合の基本式を書いておくと、

(13)　$$-K_w\theta^{(8)}+(K_t-3K_w-K_b-nN)K_w\theta^{(6)}+\{3K_wK_t-3K_w^2-2K_wK_b+K_bK_t+(nK_t-nK_w-K_w)N\}\theta^{(4)}$$
$$+\{3K_wK_t+2K_bK_t-K_wK_b-K_w^2+(K_t+nK_t-K_w)N\}\theta''+(K_b+K_w)(K_t-N)\theta$$
$$=-pR\{K_b+(1+n)K_t+K_w\}$$

となるが、これを一般的に解くのは困難であり、適当な近似解を用いねばならない。(但し(13)において　$n=K_w/K_b=C_w/R^2J$,　$K_w=EC_w/R^4$ である。)