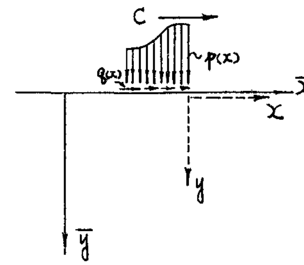
I－2　高速走行荷重により生じる半無限板内の応力分布に関する一考察

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京大工学研究所　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　○平島健一

1.　緒言　　高速走行荷重による半無限弾性媒質中の応力および変位は，移動する荷重速度により，Subsonic，Transonic，Supersonic，の３つの場合に分けて考えられ，その解析は，I N Sneddon および J. Cole & J. Huth らによって行なわれている。しかし，いずれも集中荷重を対象としたものであり，また数学的取扱いも複雑である。この点にかんがみ筆者らはつぎに示す理論にしたがって，任意分布の移動荷重が作用する上述の３つの場合についての解析を行なった。



2.　理論　　図のように半無限板の表面に移動荷重 $p(x)$ および $q(x)$ が作用した場合に生じる応力分布は固定座標系を $(\bar{x}, \bar{y})$ とすると，

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \lambda(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}}) + 2\mu\bar{u}_{\bar{x}}\\ \bar{\sigma}_y &= \lambda(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}}) + 2\mu\bar{v}_{\bar{y}}\\ \bar{\tau}_{xy} &= \mu(\bar{v}_{\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{y}})\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

で表わされる。ここに λ, μ はラーメの定数，$\bar{u}, \bar{v}$ はそれぞれ $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 方向の変位であり，$\bar{u}_{\bar{x}}, \bar{v}_{\bar{y}}$ ……は $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}, \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}$ ……を表わす。

一方，釣合式は物体力を省略すると次式が成立する。

$$(\bar{\sigma}_x)_{\bar{x}} + (\bar{\tau}_{xy})_{\bar{y}} = \rho\bar{u}_{\bar{t}^2}, \quad (\bar{\tau}_{xy})_{\bar{x}} + (\bar{\sigma}_y)_{\bar{y}} = \rho\bar{v}_{\bar{t}^2} \qquad (2)$$

ここに ρ は密度，$\bar{u}_{\bar{t}^2}, \bar{v}_{\bar{t}^2}$ はそれぞれ $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}, \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{t}^2}$ を表わす。

式(1)および式(2)の関係からこれを変形して整理すると次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\nabla^2(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}}) &= \rho(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}})_{\bar{t}^2}\\ \mu\nabla^2(\bar{u}_{\bar{y}} - \bar{v}_{\bar{x}}) &= \rho(\bar{u}_{\bar{y}} - \bar{v}_{\bar{x}})_{\bar{t}^2}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここに，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}$ である。いま２つの関数 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ および $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ を想定し，これを用いて変位 $\bar{u}, \bar{v}$ がつぎのように書き表わせたものとする。

$$\bar{u} = \phi_{\bar{x}} + \psi_{\bar{y}}, \quad \bar{v} = \phi_{\bar{y}} - \psi_{\bar{x}} \qquad (4)$$

いま，長い時間，荷重が一定の速度で動いていると考えれば，その荷重とともに移動する座標系に関しては定常な応力分布が生じる。そこでガリレオ変換，

$$x = \bar{x} + c\bar{t}, \quad y = \bar{y}, \quad t = \bar{t} \qquad (5)$$

を行なうと，式(1),(3),(4)から，つぎに示す関係がえられる。

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi &= M_L^2\phi_{x^2}, \quad M_L = \frac{c}{C_L}\\ \nabla^2\psi &= M_T^2\psi_{y^2}, \quad M_T = \frac{c}{C_T}\end{aligned}\right\} \quad (6) \qquad \left.\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda M_L^2\phi_{x^2} + 2\mu(\phi_{x^2} + \psi_{xy})\\ \sigma_y &= \lambda M_L^2\phi_{x^2} + 2\mu(\phi_{x^2} - \psi_{xy})\\ \tau_{xy} &= 2\mu(\phi_{xy} - \psi_{x^2}) + \mu M_T^2\psi_{x^2}\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ここに C_L, C_T はそれぞれこの半無限板内を伝播する縦波および横波の速度であり，次式で

示される。

$$C_L^2 = \frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu), \quad C_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{8}$$

さらに，ここで $\alpha_L^2 = 1 - M_L^2$, $\alpha_T^2 = 1 - M_T^2$ とおいて式(6),(7)を変形すると，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_L^2 \phi_{x^2} + \phi_{y^2} &= 0 \\ \alpha_T^2 \psi_{x^2} + \psi_{y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= (2\alpha_L^2 - \alpha_T^2 + 1)\phi_{x^2} + 2\psi_{xy} \\ \sigma_y &= (\alpha_T^2 + 1)\phi_{x^2} + 2\psi_{xy} \\ \tau_{xy} &= (\alpha_T^2 + 1)\psi_{x^2} - 2\phi_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

変位 u, v は次式から求められる。

$$u = \phi_x + \psi_y, \quad v = \phi_y - \psi_x \tag{11}$$

境界条件は式(12)で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = -p(x), \quad \tau_{xy} = q(x) \quad \text{on } y = 0 \\ &\lim_{x\to\infty,\ y\to\infty} [u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

したがって，問題は境界条件式(12)のもとで，式(9)を解くことに帰着する。

荷重速度 c の変化により，(a) Subsonic Case (b) Transonic Case (c) Supersonic Case の3種に分類される。

3. 解法　　つぎに示すようなフーリエ変換を考えよう。

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Phi}(\xi, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x, y)\, e^{i\xi x}dx \\ \bar{\Psi}(\xi, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x, y)\cdot e^{i\xi x}dx \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

上記式(13)の逆変換（反転公式）はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\Phi}(\xi, y)\cdot e^{-ix\xi}d\xi \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\Psi}(\xi, y)\cdot e^{-ix\xi}d\xi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(a) Subsonic Case　$M_L, M_T < 1$

式(9)の両辺のフーリエ変換をとると，

$$\bar{\Phi}_{y^2} - \alpha_L^2\xi^2\bar{\Phi} = 0, \quad \bar{\Psi}_{y^2} - \alpha_T^2\xi^2\bar{\Psi} = 0 \tag{15}$$

この微分方程式は境界条件式(12)を考慮に入れて解けば簡単に，

$$\bar{\Phi} = A_1(\xi)\cdot e^{-\alpha_L|\xi|y}, \quad \bar{\Psi} = A_2(\xi)\cdot e^{-\alpha_T|\xi|y} \tag{16}$$

となる。　また式(12)の最初の2式を式(10)に用いて整理すれば，

$$\left.\begin{aligned} (M_T^2 - 2)\xi^2 A_1(\xi) + 2i\alpha_T\xi|\xi| A_2(\xi) &= \frac{\bar{p}(\xi)}{\mu} \\ 2i\alpha_L\xi|\xi| A_1(\xi) - (M_T^2 - 2)\xi^2 A_2(\xi) &= \frac{\bar{q}(\xi)}{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ここに，$\bar{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\, e^{i\xi x}dx$，$\bar{q}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(x)\cdot e^{i\xi x}dx$ でもって表わされるものである。

これから $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ を求め，式(13)を応用して式(9),(10)に代入すれば応力および変位が求まる。　なお静荷重の作用する場合のものでは，ここでえられた解において $c \to 0$ 即ち $\alpha_L, \alpha_T \to 1$ とすれば容易に求めることができる。

(b) Transonic Case　$M_L < 1$, $M_T > 1$

この場合は(a)の場合において $\alpha_T = i\beta_T$ とおけば応力，変位がえられる。

(c) Supersonic Case　$M_L, M_T > 1$

この場合は $\alpha_L = i\beta_L$, $\alpha_T = i\beta_T$ とおけばよい。

4. 計算例　　紙面の関係上ここには割愛する。