IV-13 ランプにおける待ち合せについて

京都大学工学部　正員　米谷　栄二
京都大学工学部　学生員　○會田　正

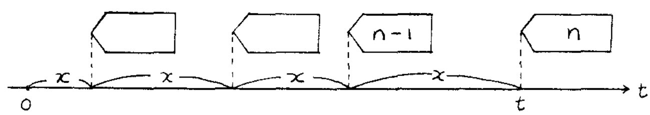
1、まえがき

ランプターミナルの加速車線の設計は主として自動車の速度、加速性能にもとずいて行なわれるが、本線の交通量が増大してくると、流入車はノーズ附近で停止したり、加速車線上を低速度走行したりして十分大きな車頭時隔が生ずるまで待つようになる。したがって、本線の交通量も設計の条件として考慮すべきであろう。以下流入車の待ち時間について、FA Haight の考えにもとずいた理論的解析と計算例を示し、さらにこのような流入性状の Traffic Simulation による解析について述べる。

2、待ち時間の基礎方程式

いま流入車が流入地点に到着した瞬間を時刻0とする。最初の車が到着するまでの時間 x の確率密度函数を $g_0(x)$, 分布函数を $G_0(x)$ とする。また二番車以降の各車間の車頭時隔 x の密度を $g(x)$, 分布を $G(x)$ とする。また時隔が x のときにその間隙に流入できる確率を $a(x)$ とする。

流入車が到着してから時刻 t まで流入できずに待ったとして、時間 (t, t+dt) の間に n 番目の車が通過する確率を $U_n(t)dt$ とする。これは時刻



図－1

$(t-x)$ に $n-1$ 番目の通過があって、それから x 時間たって n 番目の通過があり、しかもその x 時間のうちには流入できない，(図－1参照）ということによっておこるから、それぞれの確率の積を $0<x<t$ にわたって積分すればよい。

$$U_n(t) = \int_0^t U_{n-1}(t-x)\, g(x) \{1-a(x)\} dx \qquad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{1}$$

これを n について加え合わせると、一般に時刻 t まで待ったときにある車が通過する確率 $U(t)$ が求められる。$U_1(t)=g_0(t)\{1-a(t)\}$ に注意して式(1)を n について加え合わせると、

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) = g_0(t)\{1-a(t)\} + \int_0^t U(t-x) g(x) \{1-a(x)\} dx \tag{2}$$

つぎに待ち時間について考える。いま n 番目の車が通過したのちに流入できるときの待ち時間 t の密度を $w_n(t)$ とする。これは時刻 t に n 番目の車が通過する確率と、n 番目の車に続く車頭時隔に流入できる確率との積で表わされる。すなわち

$$w_n(t) = U_n(t) \int_0^{\infty} g(t)\cdot a(t)\, dt \qquad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{3}$$

$w_n(t)$ を n について加え合わせ、さらに待ち時間が0となる確率 $\int_0^{\infty} g_0(t)a(t)dt$ を考慮に入れると、待ち時間の密度函数 $w(t)$ が式(4)のように求められる。

$$w(t) = \delta(t) \int_0^{\infty} g_0(t) a(t) dt + U(t) \int_0^{\infty} g(t) a(t) dt \tag{4}$$

式(4)において $\delta(t)$ は Delta-函数である。ここで車の流れが全くrandomであって車頭時隔が平均値λの指数分布に従うとし、さらに流入は本線の車頭時隔が一定値T以上ならば必ず可能であり、T以下ならば必ず不可能であるとする。これを数式で表現すると、

$$\left.\begin{aligned} g_0(t) &= g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ G_0(t) &= G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = 1-e^{-\lambda t} \end{aligned}\right\} \quad (5) \qquad a(t) = \begin{cases} 0 & , \ t<T \\ 1 & , \ t \geqq T \end{cases} \quad (6)$$

となる。式(5),(6)を式(4)に代入し、さらに両辺のLaplace変換をとって計算すると、結局

$$\overset{*}{w}(s) = \frac{(s+\lambda)e^{-\lambda T}}{s+\lambda e^{-(\lambda+s)T}} \quad (7)$$

となって、待ち時間もの密度函数 $w(t)$ のLaplace変換が求められる。

3. 平均待ち時間

流入車の平均待ち時間 $\bar{w}$ は式(7)をSについて微分したのちにS=0とおいたものから得られる。

$$\bar{w} = -\left[\frac{\partial}{\partial s}\overset{*}{w}(s)\right]_{s=0} = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T}-1-\lambda T\right) \quad (8)$$

λとTの組合わせに対して平均待ち時間を計算した結果を図-2に示す。これによるとたとえば本線に $\lambda=0.3$ (1,080台/時)の交通量があるとき $T=4.0$ 秒の車頭時隔が生ずるまでに平均3.7秒待たねばならないことがわかる。

4. 待ち時間の分布

いま $W(t)$ を長さt以上の車頭時隔が生ずるまでの待ち時間の分布函数(超過確率)とし $\overset{*}{W}(s)$ をそのLaplace変換とする。すなわち、

$$\overset{*}{W}(s) = \mathcal{L}\left[\int_t^\infty w(t)dt\right] = \mathcal{L}\left[1-\int_0^t w(t)dt\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\overset{*}{w}(s) \quad (9)$$

上式に式(7)を代入して整理し、さらに級数展開を行なってその逆変換をとると $W(t)$ を得る。

$$W(t) = 1-e^{-\lambda T}\left\{1+\frac{\lambda t}{1!}\right\} + e^{-2\lambda T}\left\{\frac{[\lambda(t-T)]}{1!}+\frac{[\lambda(t-T)]^2}{2!}\right\} - e^{-3\lambda T}\left\{\frac{[\lambda(t-2T)]^2}{2!}+\frac{[\lambda(t-2T)]^3}{3!}\right\} + \cdots \quad (10)$$

Tを単位として計算した $W(t)$ の値を図-3に示す。これによると $\lambda=0.3$, $T=4.0$ に対して $W(t)=0.005$ にとるとき $t \fallingdotseq 6\times4=24$ 秒となり、流入車の99.5%は $T=4$ 秒の時隔が現われるまでに24秒以上は待たなくてよいことがわかる。

5 Simulationによる解析

流入待ちの車に後続する流入車の待ち時間は理論的にはかなり複雑になるが、Traffic Simulationの手法を用いて試行的に解析することができる。これについての詳細は講演において述べる。

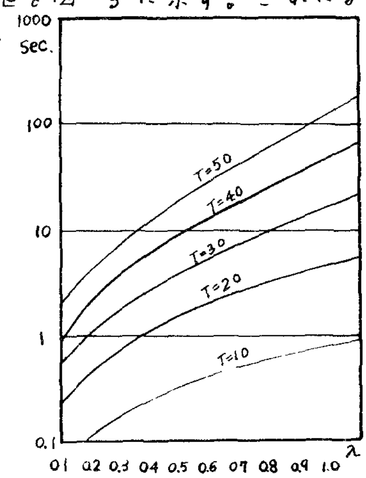


図-2

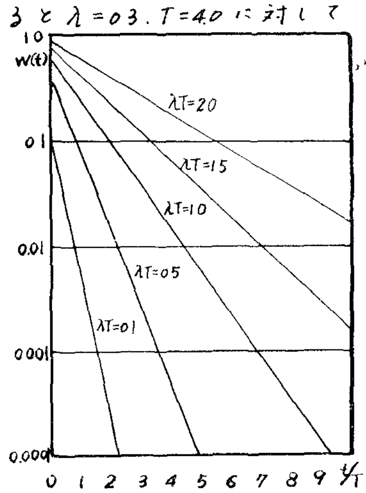


図-3