I-11 斜板の一計算法について

大阪工業大学　正員　岡村宏一

1. まえがき　一般に斜板の曲げ問題を取扱う場合,矩形板の場合と比較して斜線に沿って境界条件を満足せねばならないので問題が面倒になる。しかし,このために特別な手段を用いて計算を複雑にすることは好ましいことではなく,斜板の曲げ変形自体が通常の場合は特に問題にせねばならない様な特異点もないので単純簡易な形で計算される事が望まれる。こゝで述べる計算例は,Levy 解[1]が一般に用いられる境界条件(例えば単純支持,固定,自由など)に対して収束の速な性質を特つ事を利用して之に選点法を適用して解を求めたものである。この方法は全く単純であるので計算は簡易なものになる。問題は精度であるが,こゝでは既に正解の知られている斜板に対して計算を行つてみたが充分良好な結果を得た。Levy解を用いる場合,基本的な形では2つの単純支持辺を含まねばならぬがsuperposeによって種々な境界条件に拡張できる。又,選点法を用いれば正攻法では非常に難しくなる斜線上に不静定力の分布する解も容易に得られよう。これは斜板を含む構造の解決に必要なものである。
尚,こゝでは既知の問題と比較するために斜対称の場合を取扱つたが非対称の場合にも同様に計算を行うことができる。

2. 計算式

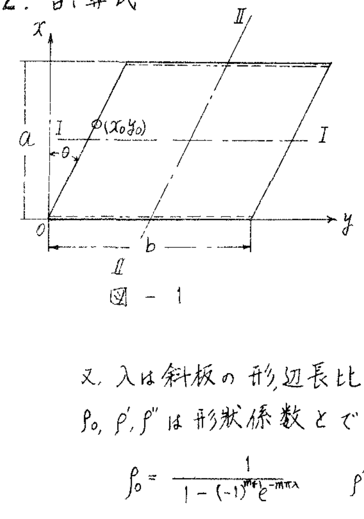


図 - 1

図-1を参照して先づ($x=0$, $x=a$)の2辺が単純支持される場合Levy解を基にしてI,II軸に対して斜対称な補足解を斜板計算に便利な形に作ると次の様になる。

$$w=\sum_m\left[g_m(\eta)A_m-f_m(\eta)B_m\right]\sin m\pi\xi \qquad \text{-----------(1)}$$

但し　$\xi=\dfrac{x}{a}$,　$\eta=y/a$,　A_m, B_mは積分常数,　w: たわみ

$$g_m(\eta)=\left\{(\rho''\lambda-\rho'\eta)e^{m\pi\eta}+(\rho''\lambda+\rho_0\eta)e^{-m\pi\eta}\right\}m\pi$$

$$f_m(\eta)=\rho' e^{m\pi\eta}+\rho_0 e^{-m\pi\eta}$$

又,λは斜板の形,辺長比と斜角に関係する常数で　$\lambda=b/a+\tan\theta$

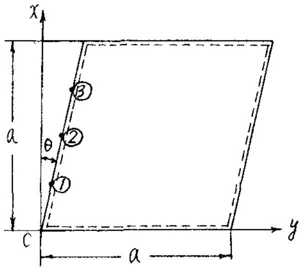
ρ_0, ρ', ρ''は形状係数とでも称すべきもので

$$\rho_0=\frac{1}{1-(-1)^{m+1}e^{-m\pi\lambda}}\qquad \rho'=\frac{(-1)^{m+1}e^{-m\pi\lambda}}{1-(-1)^{m+1}e^{-m\pi\lambda}}\qquad \rho''=\frac{(-1)^{m+1}e^{-m\pi\lambda}}{\{1-(-1)^{m+1}e^{-m\pi\lambda}\}^2}$$

例えば特に細長い斜板の場合(b/aが充分大きい場合)は,$\rho_0=1$, $\rho'=\rho''=0$となり補足解の性質から斜線境界附近のみに問題が残り板の中央附近では一方向板と同様に取扱えることを示している。(1)式は板内においては$\Delta\Delta w=0$を満足するから境界選点$(x_0 y_0)$をそのまゝ代入して用いる。又,展開系列mは斜線境界上に選んだ選点の数に対応する。次項計算例にも示す様に周辺単純支持の場合の1,2の例では境界上の選点3点,従つて3項の計算で充分な精度の解が得られるし計算は指数関数表が手元にあれば簡易に行うことが出来る。

1：直交異方性板にも同様の解がある。

3. 計算例の1　周辺単純支持等分布荷重を受ける斜板



図－2

図－2を参照して計算を行ってみよう。この場合 $a=b$, $\tan\theta=0.2$ である同様の板に就て Fuchssteiner[2], 小松氏[3]の解が見られる。この場合斜線境界條件 $w=0$, $\Delta w=0$ より境界上選点に対し次の様な條件式が得られる.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\substack{m\\1,2,3}} \left[g_m(\eta)A_m - f_m(\eta)B_m\right]\sin m\pi\xi &= C \\ \sum_{\substack{m\\1,2,3}} \left[-f_m(\eta)m^2A_m\right]\sin m\pi\xi &= C' \end{aligned}\right\} \text{-----------(2)}$$

選点として今図－2に示す様に斜線境界の4等分点①②③を選ぶ。そうすれば(2)の級数は3項迄とればよい。C, C'は荷重項であって等分布荷重満載の場合は beam と同様簡単に

$$C=\frac{-K}{24}(\xi^4-2\xi^2+\xi) \qquad K=\frac{qa^4}{D} \qquad \text{但し}\ D\text{は板の剛度}\ \ q\text{は荷重強度}$$

$$C'=\frac{-K}{4\pi^2}(\xi-1)\xi,$$

(2)式の計算は指数函数表を用いて容易に終了し次の様な2群の3元連立方程式を得る.

A_1	A_2	A_3		更に B_1	B_2	B_3	
−0.64306	−2.9171	−3.9727	$= 0.^{2}047494K$	−0.64306	−0.72928	−0.44141	$= -0.^{2}075773K$
−0.77995	0	3.5072	$= 0.^{2}063326K$	−0.77995	0	0.38969	$= -0.^{2}094799K$
−0.47854	1.0977	−1.5483	$= 0.^{2}047494K$	−0.47854	0.27442	−0.17203	$= -0.^{2}058799K$

以上を解いて中心点のたわみ，モーメントを求めた結果を Fuchssteiner，小松氏の解と比較すると

	本計算例	Fuchssteiner	小松
中心点たわみ $\left(\times\frac{qa^4}{D}\right)$	$0.^{2}0397$	$0.^{2}0397$	$0.^{2}0394$
中心点 M_x $(\times qa^2)$	0.0468	—	0.0464

誤差は両氏の解と比較して1％以内に止まる。

計算例の2　中心集中荷重を受ける場合　同様の斜板で中心集中荷重を受ける場合を計算する。荷重項として次の様な収束の速な級数を計算すればよい。

$$C=-\frac{K}{2\pi^3}\sum_{odd}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)n\pi\right\}e^{-n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)}\sin m\pi\xi$$

$$C'=\frac{K}{2\pi^3}\sum_{odd}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)}\sin m\pi\xi \qquad K=\frac{Pa^2}{D}$$

C, C'を計算すれば前例同様に2群の3元連立方程式が得られる。求めた結果を比較すると，中心点のたわみは $0.0114\frac{Pa^2}{D}$，小松氏の解は $0.0114\frac{Pa^2}{D}$ であり完全に一致する。

4. むすび　選点法を用いる場合は方法が単純であり特別な手順も含まないから簡易に計算する事ができる。本例では簡単なものを取扱ったが精度も仲々良好である。その他の境界の場合に就ても検討されねばならないだろうが，Levy 解の収束の良い事にも起因していると思われる。又連続系の斜板，斜板を含む複雑な構造等ではこの様な単純な方法を拡張してみるのも一法かと思われる。

2，3はおのおの最小自乗法，等角写像の手法を適用したものである。