I-1 ヒンジが橋梁の衝撃に与える影響について

京都大学工学部　正員　山田善一
○ 金沢大学工学部　正員　小堀為雄

従来ヒンジを有する橋梁たとえば、ゲルバー桁橋などは振動の多い構造とされてきた。これには多くの理由があろうが、最も大きいものの一つは、移動荷重がヒンジを通過する際の荷重の運動量の急激な変化による衝撃作用が大きな要素である。本研究ではこれらの作用を究明する為にFig.1に示すような両端固定で中央にヒンジを有し、EI一定の桁上をm_1なる質量を有する荷重がvなる速度で移動する場合について究明する。

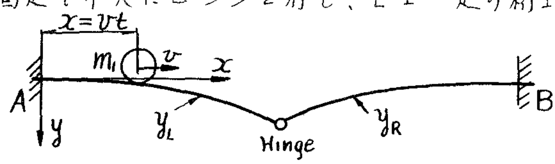

Fig. 1

さて、われわれは動的撓みyを、基準関数ϕ_nと一般座標q_nによって表わされるものとする。

$$y_L=\sum_{n=1}^{\infty} q_{n(t)}\,\phi_{Ln(vt)}\,\phi_{Ln(x)}\ ,\qquad y_R=\sum_{n=1}^{\infty} q_{n(t)}\,\phi_{Rn(vt)}\,\phi_{Rn(x)} \qquad\text{------------ (a)}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_{Ln(x)}&=\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x-\alpha_n(\sinh\beta_n x-\sin\beta_n x)\\ \phi_{Rn(x)}&=\cosh\beta_n(2l-x)-\cos\beta_n(2l-x)-\alpha_n(\sinh\beta_n(2l-x)-\sin\beta_n(2l-x))\end{aligned}\right\}\ \text{--- (b)}$$

ボールがAよりvなる一定速度で移動するときの桁の振動を次の段階にわけて解析する

(i)　ボールがヒンジの左桁上にある場合

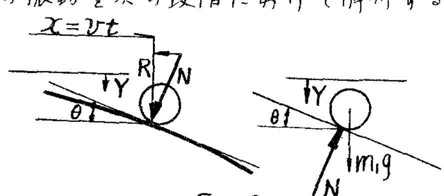

Fig. 2

Fig. 2 に示されるような状態でのボールの釣合式は

$$\left.\begin{aligned}&m_1\frac{d^2Y}{dt^2}\cos\theta+N-m_1g\cos\theta=0 &&(N\text{方向})\\ &m_1\frac{d^2Y}{dt^2}\sin\theta-m_1g\sin\theta=0 &&(\text{接線方向})\end{aligned}\right\}\ (c)$$

となり$\theta=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=vt}$は非常に小さいとして、$\sin\theta\doteqdot 0$より

式(C)は、　$R=-m_1\frac{d^2Y}{dt^2}+m_1g$ ---------------------- (d)

ここに、Yはボールが$x=0$にある時の重心の位置をY=0とした場合のボールの重心の変位、m_1はボールの質量、Rはボールが桁えおよぼす圧力であり、また桁がボールえおよぼす反力でもある。　いまボールが桁の$x=vt$の点にある時の桁の撓み曲線yは、式(a)で表わされる。この場合、運動のエネルギーTと位置のエネルギーVは

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\int_0^{2l}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dx=ml\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dot{q}_n^2\phi_{n(vt)}^2+2(\beta_n v)\dot{q}_n q_n\phi_{n(vt)}\dot{\phi}_{n(vt)}+(\beta_n v)^2q_n^2\dot{\phi}_{n(vt)}^2\right]\\ V&=\frac{1}{2}EI\int_0^{2l}\left(\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}EI\sum_{n=1}^{\infty}q_n^2\int_0^{2l}\phi_{n(vt)}^2\beta_n^4\phi''^2_{n(x)}\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^4 l\,EI\,q_n^2\phi_{n(vt)}^2\end{aligned}\right\}\text{--(e)}$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}+\frac{\partial V}{\partial q_n}=Q_n \qquad\text{------------------ (f)}$$

は、一般力Q_nに　$Q_n=R\,\phi_n^2(vt)=(m_1g-m_1\frac{d^2Y}{dt^2})\phi_n^2(vt)$を用い、さらに次のパラメーター$\alpha$, R_1, および記号Δ_0, $\bar{q}_n$, τを用いるとこの系の運動方程式は次のようになる。

速度パラメーター　$\alpha=\frac{v}{l}\sqrt{\frac{\Delta_0}{g}}$　,　重量パラメーター　$R_1=\frac{m_1}{2ml}$　,

$\Delta_0=\frac{m_1gl^3}{6EI}$　,　$\bar{q}_n=q_n/\Delta_0$　,　$\tau=\frac{vt}{l}$　,　$k_n=\beta_n l$

$$(1+R_1\phi_n^2)\frac{d^2\bar{q}_n}{d\tau^2}+2k_n\frac{\dot{\phi}_n}{\phi_n}(1+2R_1\phi_n^2)\frac{d\bar{q}_n}{d\tau}+\left\{k_n^2\frac{\ddot{\phi}_n}{\phi_n}(1+2R_1\phi_n^2)+\frac{R_1k_n^4}{3\alpha^2}+2k_n^2\left(\frac{\dot{\phi}_n}{\phi_n}\right)^2\right\}\bar{q}_n$$
$$=R_1/\alpha^2-R_1\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty}\left[\frac{d^2\bar{q}_j}{d\tau^2}+4k_j\frac{\dot{\phi}_j}{\phi_j}\frac{d\bar{q}_j}{d\tau}+2k_j^2\frac{\ddot{\phi}_j}{\phi_j}\bar{q}_j+2k_j^2\dot{\phi}_j^2\bar{q}_j\right]\phi_j^2 \qquad\text{----------(g)}$$

式(g)よりボールがヒンジに達した時のyおよび$\dot{y}$は求められる。

(ii) ボールかヒンジに達した時の衝撃作用について、

さて、我々は、ボールが衝撃を与える直前の時刻を$t'=0$として、式(g)で求めた撓みy_L、y_R 撓角 $\frac{dy_L}{dx}$, $\frac{dy_R}{dx}$ 垂直方向の速度$\frac{dy}{dt}$ を初期値として方程式を導く。ボールが衝撃作用をおよぼす直前のヒンジ部の桁の形状は、Fig. 3 のようであると考える。この状態は、パラメーターα, R_1, によって定まるのであるが、一般に荷重による撓みの影響が大きいと考えられるので今回はこの状態について研究を進める。

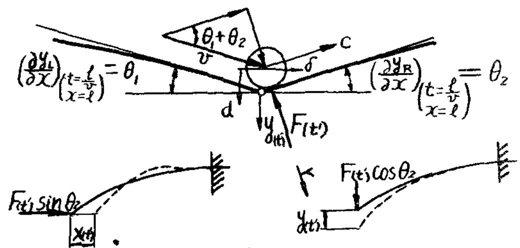

Fig. 3

ボールが右桁先端に衝突する場合衝撃力は桁の軸線に対して直角方向と接線方向に分割できる。この時接線方向には摩擦を無視すれば抗力はないので接線方向の速度変化はない。

またボールの直角方向の変位をγとすれば、反力Fは$m_1\ddot{\gamma}=F_{(t')}$ これより $\dot{\gamma}=\frac{1}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}dt'$ この時t_1後のボールの速度v'は $v'=v_0-\frac{1}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}\,dt'$ さらに、$t'=t$ 後のボールの変位γは

$$\gamma=v_0t-\int_0^t\frac{dt'}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}\,dt'=v\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot t-\int_0^t\frac{dt'}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}dt' \quad \text{---------} (h)$$

一方接線方向の変位Cは、 $C=v\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot t$ ボールの垂直方向の変位dは、

$$d=\left[v\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot t-\int_0^t\frac{dt'}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}\,dt'\right]\cos\theta_2-v\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot t\cdot\sin\theta_2 \quad \text{----} (i)$$

ボールの水平方向の変位δは

$$\delta=v\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot t\cdot\cos\theta_2+\left[v\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot t-\int_0^t\frac{dt'}{m_1}\int_0^{t_1}F_{(t')}\,dt'\right]\sin\theta_2 \quad \text{-------} (j)$$

ところで桁には$x=\ell$の点で垂直方向に$F_{(t')}\cos\theta_2$, 水平方向に$F_{(t')}\sin\theta_2$の力が加えられることになる。この場合の運動方程式を立てる。まず、垂直方向に対して、$y=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n\phi_{n(x)}$ --(k)

とする。一般に2つのエネルギーT, Vと外力$f(t')$との間に次の関係が成立する。

$$\frac{d}{dt}(T+V)=f_{(t')}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{-------------------------} (\ell)$$

この式を式(e)、(k)を用いて書きあらわすと、運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{\tilde{q}}_n+\omega_n^2\tilde{q}_n=\frac{\ell}{2m}F_{(t')}\cos\theta_2(\phi_{n\,x=\ell}) \quad \text{--------------------} (m)$$

ここに、 $\omega_n^2=\frac{EI\beta_n^4}{m}$, $\theta_2=\left(\frac{\partial y_R}{\partial x}\right)_{x=\ell}$ である。そこで、衝撃力$F_{(t')}\cos\theta_2$による桁のヒンジ部の垂直変位と、ボールの垂直変位dとは、$F(t)$が作用している間等しいはずであるから

$$y_{\left(x=\ell \atop t'=t\right)}-y_{\left(x=\ell \atop t'=0\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n(\phi_{n(x)})_{x=\ell}-\sum_{n=1}^{\infty}q_n\phi_{n(x=\ell)}\phi_{n\left(t=\frac{\ell}{v}\right)}=d \quad \text{--------------} (n)$$

同様に水平方向の衝撃力$F_{(t)}\sin\theta_2$に対しては、$y=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\tilde{q}}_n\phi_{n(x)}$ として式(ℓ), (n)は、それぞれ

$$\frac{d}{dt}(T+V)=M_{(t)}\left(\frac{\partial^2y}{\partial t\partial x}\right)_{x=\ell}=p_{(t)}\dot{X}_{(t)}=F_{(t')}\sin\theta_2\,\dot{X}_{(t')} \quad \text{--------------} (o)$$

$$\dot{X}_{(t')}=\frac{d}{dt'}\int_0^{2\ell}dx(1-\cos\theta)\doteqdot\frac{d}{dt}\int_0^{2\ell}dx\frac{\theta}{2}\doteqdot\frac{d}{dt}\int_0^{2\ell}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx=2\beta_n\ell\,\dot{\hat{\tilde{q}}}_n\hat{\tilde{q}}_n \quad \text{-------} (p)$$

$$\ddot{\hat{\tilde{q}}}_n+\omega_n^2\hat{\tilde{q}}_n=\frac{\beta_n}{m}F_{(t')}\sin\theta_2\cdot\hat{\tilde{q}}_n \quad \text{--------------------} (q)$$

これより、水平方向の変位$X_{(t)}$を求め、これがボールの水平方向変位δと等しくなる。

$$X_{(t')}=\int_0^{2\ell}dx(1-\cos\theta)\doteqdot\int_0^{2\ell}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\ell\,\hat{\tilde{q}}_n=\delta \quad \text{----------------} (r)$$

以上より式(n)、(r)、を満足するよう $F_{(t)}$, $y_{(t)}$ を定める。