

### (I-3) 水中にある棒状構造物の振動に関する一考察

京都大学工学部 正員 工博 後 藤 尚 男

京都大学大学院 学生員 ○ 土 岐 憲 三

海峡、貯水池などをわたる橋の橋脚のように、水中にある棒状構造物が、水平地震動を受けた場合の振動性状や、この場合、この構造物に作用する動水圧の理論解を誘導し、その工学的意義について考察を加えようとするものである。本研究では、その第一段階として、その頂部がちょうど水面に達している円柱を採り上げた。

#### § 1 曲げ振動の基礎式

図-1のごとく座標 $y-z$ を定め、 $F$ を単位長さ当りに働らく水の抗力とし、 $y_0$ を

$$y_0 = \frac{\delta g}{\omega^2} \sin \omega t$$

で表わせる地動とした場合に、この円柱の曲げ振動に関する微分方程式は、つぎのように書ける。

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial z^4} + \frac{\gamma_0 \cdot A}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -F + \delta g \sin \omega t \dots (1)$$

ここに、 $E$ は弾性係数、 $I$ は断面二次モーメント、 $\gamma_0$ は単位体積重量、 $A$ は断面積、 $\omega$ は地動の円振動数である。

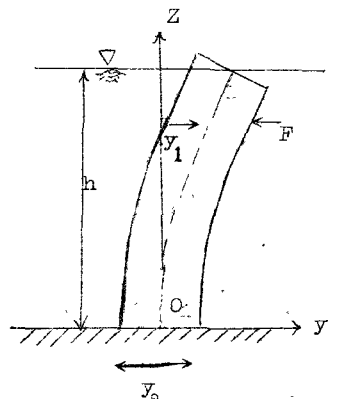


図-1

#### § 2 水の抗力 $F$ の表示

図-2のように円柱座標を定め、速度ポテンシャルを $\psi$ とすれば

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{W_0}{gK} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

が満たされねばならない。ここに $W_0$ は水の単位体積重量、 $K$ は体積

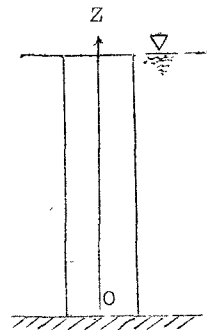


図-2

弾性率を表わす。

地動が $\omega$ なる円振動数を持つているものとすれば、水分子の運動も $\omega$ なる振動数を持つものと考れられる。したがって、

$$\psi = R(r) \cdot \theta(\theta) \cdot Z(z) \cdot e^{i\omega t}$$

と置いて、式(2)に代入すれば、

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha^2 Z = 0, \quad \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \beta^2 \theta = 0,$$

$$\left\{ 2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \{ (r^2 - a^2) - \beta^2 \} R = 0 \right.$$

となり、最初の二式は $\psi$ の満たすべき境界条件により解ける。第三の微分方程式の境界条件は円柱表面においては、円柱と水分子の相対速度が0であることから、つぎのようになる。

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \cos \theta = \cos \theta \left(\frac{dy}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\right) \quad (3)$$

$\alpha$ については、これが実数の場合には境界条件を満足する値は無数にあり、これらを $\alpha_m$ で表わし、虚数の場合には唯一であるからこれを $\alpha$ で表わす。一方、 $r^2 = W_0 \omega^2 / gK$ であつて  $r^2 - a^2 > 0$  の場合、 $r^2 - a^2 < 0$  の場合に、それぞれ  $\sqrt{r^2 - a^2} = \lambda_m$ ,  $\sqrt{r^2 - a^2} = i\lambda'_m$  とおけば結局、 $\psi$ は次式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \psi = & e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_1 \{ J_n(\lambda_m r) - iY_n(\lambda_m r) \} \cos \alpha_m z \cos n\theta \\ & + i e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=s}^{\infty} E_2 K_n(\lambda'_m r) \cos \alpha'_m z \cos n\theta \\ & + i e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} E_3 \{ J_n(\lambda_0 r) - iY_n(\lambda_0 r) \} \cosh \alpha_0 z \cos n\theta \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $J_n, Y_n$ はBessel関数  $K_n$ は変形されたBessel関数である。

いま、円柱が受ける動水圧を $P_\theta$ と書けば、

$$P_\theta = \frac{W}{g} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

で与えられるから、円柱に働く単位長さ当りの水による抗力 $F$ は、次式で表わされる。

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} P_\theta \cdot r \cos \theta \, d\theta$$

### § 3 水中にある円柱の定常解

式(5)を式(1)に持ち込み、これを解けば、水中にある円柱が、定常強制変位 $y_0$ を受けた場合のたわみが完全に求められる。

しかるに、式(5)の $F$ を定めるには式(3)、(4)から分かるように、たわみが求まらねばならないから、これを直接に解くことは非常に困難となる。従来の動水圧に関する理論において、構造物のたわみを無視しているのも、この点に起因するものと思われる。しかしながら、棒状構造物のようなたわみ易い構造物では、このたわみを無視することはできない。

そこで、漸近的方法によつて解くことにし、まず、円柱のたわみを無視した場合の動水圧 $P_0$ を定め、この $P_0$ が円柱に働いているものとしてこれを水の抗力 $F$ に換算する。さらに、円柱のたわみを式(1)の正規関数 $\chi(z)$ を用いて $y_1 = \sum_j \varphi_j X_j$ と表わし、これと $F$ をLagrangeの運動方程式に代入すれば、時間関数 $\varphi_j$ に関する微分方程式が得られる。この $\varphi_j$ を解けば円柱のたわみを知り、これによつて水分子の円柱表面での速度が分かるから、 $\psi$ が、したがつて $P_0$ が求められる。つぎに、この $P_0$ を、円柱のたわみを無視した場合の動水圧 $P_0$ の代わりに用いて同様の演算を行なうことによつて、 $P_0$ は一般につきのように表わされることが分かる。ただし、 $r^2 - a_m^2 > 0$ の場合のみを書き、 $r^2 - a_m^2 < 0$ の場合と、 $a$ が虚数の場合はここには略する。

$$P_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8\delta W_0}{\lambda_m} \frac{\sin \alpha_m h}{\sin 2\alpha_m h + 2\alpha_m h} \frac{\sqrt{(A_m J_1 + B_m Y_1)^2 + (A_m Y_1 - B_m J_1)^2}}{A_m^2 + B_m^2} \\ \times \cos \theta \cos \alpha_m z \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \left( \frac{w^2}{g} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_{i1}}{\delta} \times i \right)^n \sin \{ \omega t - (n+1) E_m \} \right. \\ \left. + (-1)^n \left( \frac{w^2}{g} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_{i4}}{\delta} \times i + 1 \right) \left( \frac{w^2}{g} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_{i1}}{\delta} \times i \right)^{n-1} \sin(\omega t - n E_m) \right]$$

$$\text{ここに、} J_1 = J_1(\lambda_m r_0), \quad Y_1 = Y_1(\lambda_m r_0),$$

$$A_m = J_0(\lambda_m r_0) - J_2(\lambda_m r_0), \quad B_m = Y_0(\lambda_m r_0) - Y_2(\lambda_m r_0),$$

$$S_{i1} = 8 \cdot \delta \frac{g h^3}{(k_1 h)^4 a^2 - \omega^2 h^4} \cdot \frac{W_0}{r_0} \frac{h}{r_0} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m h} \frac{\sin \alpha h}{\sin 2\alpha_m h + 2\alpha_m h} \times \\ \times \frac{\sqrt{(A_m J_1 + B_m Y_1)^2 + (A_m Y_1 - B_m J_1)^2}}{A_m^2 + B_m^2} \int_0^h \cos \alpha_m z X_i dz$$

$$S_{i4} = \delta \frac{gh^3}{(k_1 h)^4 a^2 - \omega^2 h^4} \int_0^h X_i dz, \quad E_m = \tan^{-1} \frac{A_m Y_1 - B_m J_1}{A_m J_1 + B_m Y_1}$$

$$X_i = \sqrt{h} \left\{ \cos k_1 z - \cosh k_1 z + \frac{\sin k_1 h - \sinh k_1 h}{\cos k_1 h + \cosh k_1 h} (\sin k_1 z - \sinh k_1 z) \right\}$$

$$k_1 h = 1.875, 4.694, 7.855, \dots \quad (\cos k_1 h \cdot \cosh k_1 h + 1 = 0 \text{ の根})$$

である。

以上によつて、水中にある円柱に定常強制変位が働いたときの動水圧、円柱の挙動の近似的理論解を誘導することができた。

これらに関する工学的意義、数値計算例などについては講演時に述べる。