(IV－7) 河床の不安定におよぼす自由水面の効果について

神戸大学工学部　正員　松　梨　順三郎

要旨　筆者はさきに開水路における移動床の不安定を微少振動の方法によつて論じた。本講演においては、閉水路における移動床の不安定性を開水路の場合と同様の方法によつて理論的に論じ、両者の結果を比較して、砂面の不安定性におよぼす自由水面の効果を明らかにしようとした。

1．閉水路における移動床の不安定性について：　水流および流砂の基礎方程式として、幅B、高さDの矩形断面閉水路を考え

$$\frac{\partial}{\partial t}\{u_m(D-\eta)\}+\frac{\partial}{\partial x}\{\alpha_m u_m^2(D-\eta)\}=-u_*^2-u_*'^2\left\{1+\frac{2(D-\eta)}{B}\right\}+g(D-\eta)I \tag{1}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\{u_m(D-\eta)\}=0 \tag{2}$$

$$q_B=k(\tau-\tau_c)^{\omega} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\partial q_B}{\partial x}=0 \tag{4}$$

ここに、ηは砂面の高さ、Iは動水勾配、$u_*=\sqrt{\tau/\rho}$、$u_*'=\sqrt{\tau'/\rho}$を表わす。たゞし、τ τ'はそれぞれ砂面および固定壁面における摩擦応力を表わす。τ，τ'の函数特性としては、いずれも平均流速u_m，ηの函数と仮定して、一般的に取り扱うことにする。開水路の場合と同様に砂面の微小変動η'によつて誘起される平均流速、流砂量、動水勾配の微小変動量をそれぞれu_m'，q_B'，I'として

$$u_m=u_{m0}+u_m',\ \eta=\eta_0+\eta',\ q_B=q_{B0}+q_B',\ I=I_0+I'$$

を(1)、(2)、(3)、(4)に代入し、微小量を省略して、u_m', q_B', I'を消去すると、

$$P_1\frac{\partial^2\eta'}{\partial t^2}+Q_1\frac{\partial^2\eta'}{\partial t\partial x}+R_1\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}+M_1\frac{\partial\eta'}{\partial t}+N_1\frac{\partial\eta'}{\partial x}=0 \tag{5}$$

をうる。ここに、P_1, Q_1, R_1, M_1, N_1 はそれぞれ、

$$P_1=(D-\eta_0)\left[-\frac{\rho^{\omega}k\omega}{1-\varepsilon}\left\{(u_*^2)_0-(u_*^2)_c\right\}^{\omega-1}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\right]$$

$$Q_1=-\frac{\rho^{\omega}k_{\omega}}{1-\varepsilon}\left\{(u_*^2)-(u_*^2)_c\right\}^{\omega-1}(D-\eta_0)\left[(2\alpha_m+1)u_{m0}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0+(D-\eta_0)\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial \eta}\right)_0\right]-2\alpha_m u_{m0}(D-\eta_0)^2$$

$$R_1=-\frac{\rho^{\omega}k_{\omega}}{1-\varepsilon}\left\{(u_*^2)_0-(u_*^2)_c\right\}^{\omega-1}\cdot 2\alpha_m u_{m0}(D-\eta_0)\left[u_{m0}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0+(D-\eta_0)\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial \eta}\right)_0\right]$$

$$M_1=\left[\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0+\left\{1+\frac{2(D-\eta_0)}{B}\right\}\left(\frac{\partial u_*'^2}{\partial u_m}\right)_0\right]\cdot\left[-\frac{\rho^{\omega}k_{\omega}}{1-\varepsilon}\left\{(u_*^2)_0-(u_*^2)_c\right\}^{\omega-1}\left(\frac{u_*^2}{u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\right]$$

$$N_1=-\frac{\rho^{\omega}k_{\omega}}{1-\varepsilon}\left\{(u_*^2)_0-(u_*^2)_c\right\}^{\omega-1}\left[\left(\frac{\partial u_*}{\partial u_m}\right)_0+\left\{1+\frac{2(D-\eta_0)}{B}\right\}\left(\frac{\partial u_*'^2}{\partial u_m}\right)_0\right]\left\{u_{m0}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0+(D-\eta_0)\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial \eta}\right)_0\right\}$$

で与えられる。たゞし、$(u_*^2)_0=\tau_0/\rho$, $(u_*^2)_c=\tau_c/\rho$, $(\partial u_*^2/\partial u_m)_0=(1/\rho)\cdot(\partial\tau_0/\partial u_{m0})$, $(\partial u_*^2/\partial\eta)_0=(1/\rho)\cdot(\partial\tau_0/\partial\eta_0)$, $(\partial u_*'^2/\partial u_m)_0=(1/\rho)\cdot(\partial\tau_0'/\partial u_{m0})$, $(\partial u_*'^2/\partial\eta)_0=(1/\rho)\cdot(\partial\tau_0'/\partial\eta_0)$ とし、suffix "o" は砂面が変形していない状態における量を表わすものとする。

砂面の擾乱による波形の変化が

$$\eta'=Ae^{rt+i\beta x}\quad たゞし、\quad r=b-ic \tag{6}$$

で与えられると仮定し、この擾乱波の時間的発達あるいは減衰について考察することにし、砂面の安定性を数学的につぎのように定義することにする。

$$b=\mathcal{R}(r)\begin{cases}>0 & 不安定\\ = & 中立の安定\\ <0 & 安定\end{cases} \tag{7}$$

式(6)の波形が微分方程式(5)を満足させるためには、

$$P_1r^2(M_1+Q_1\beta i)r-R\beta^2+N_1\beta i=0 \tag{8}$$

が成立することが必要である。式(8)は r について二次の代数方程式であるから一般に二根 r_1 r_2 を

もつはずである。この二根を求める場合、開水路における理論との類似性を考慮して、つぎのような方法をとつた。$r=b-ic$ を式(8)に代入し、実数部と虚数部にわけて必要条件を求めると、

$$P_1(b^2-c^2)+M_1b+Q_1c\beta-R_1\beta^2=0 \tag{9}$$

$$-2P_1bc-M_1c+Q_1b\beta+N_1\beta=0 \tag{10}$$

(9)，(10)から r の虚数部 c を消去すると

$$4P_1^3b^4+8P_1^2M_1b^3+(5P_1M_1^2-4P_1^2R_1\beta^2+P_1Q_1^2\beta^2)b^2+(M_1^3-4P_1M_1R_1\beta^2+Q_1^2M_1\beta^2)b-(M_1^2R_1+P_1N_1^2+Q_1N_1M_1)\beta^2=0 \tag{11}$$

式(11)を b の4次式とみなし、常数項の括弧のなかを計算すると、

$$\begin{aligned}
&-(M_1^2R_1+P_1N_1^2+Q_1N_1M_1)\\
&=\frac{\ell^2}{4}\left\{-n\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\right\}(D-\eta_0)\left[n\left\{(2\alpha m-1)u_{m0}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial \eta}\right)_0+2\alpha m(D-\eta_0)\right\}\right]^2-\frac{\ell^2}{4}\left\{-n\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\right\}(D-\eta_0)\\
&\quad\left[n\left\{(2\alpha m-1)u_{m0}\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial u_m}\right)_0-(D-\eta_0)\left(\frac{\partial u_*^2}{\partial \eta}\right)_0+2\alpha m(D-\eta_0)\right\}\right]^2=0
\end{aligned}$$

となり、恒等的に0になる。たゞし、$\ell=(\partial u_*^2/\partial u_m)_0+\{1+2(D-\eta_0)/B\}(\partial u_*^2/\partial u_m)_0$，$n=\rho^\omega k\omega\{(u_*^2)_0-(u_*^2)_c\}^{\omega-1}/(1-\varepsilon)$ とする。そこで式(11)は $b=0$ という根を恒等的にもつていることになる。この場合の虚数部は(9)，(10)によつて求められ、式(8)を満足する一根として、

$$r_1=b_1(=0)-\frac{N_1\beta}{M_1}i \tag{12}$$

が得られる。他の一根は式(8)，(12)より求められ、

$$r_2=\frac{-M_1}{P_1}-\frac{(Q_1M_1-P_1N_1)\beta}{P_1M_1}i \tag{13}$$

をうる。求ゆられた二根 r_1，r_2 の実数部のみに着目すると、

$$b_1=0 \quad , \quad b_2=-M_1/P_1 \tag{12)$'$，(13)$'$}$$

をうる。砂面が安定であるためには、式(7)の定義によつて、b_1，b_2 すべてが同時に負数であることが必要である。(12)$'$，(13)$'$ よりそのような領域は存在しない。また、二根のうち少くとも一根が0で他が負数である領域は中立の安定と考えられるのであるが、その領域は、

$$M_1/P_1>0 \tag{14}$$

で示される。また不安定領域は二根のうち少くとも一根が正の数であるとよいから、その領域は

$$M_1 / P_1 < 0 \tag{15}$$

で示される。

以上の結果は砂面変動のオ一次近似方程式を式(7)で示された定義のもとに数学的に取り扱つた結果を示す。物理現象として可能であるかどうかについては更に検討が必要であると考える。

2．自由水面の効果について：　開水路と閉水路を比較対照することにより、自由水面をもつ開水路の特異性を明らかにする。このことについては講演時に発表したいと考えている。