

神戸大学工学部 正員 杉 本 修 一

彎曲部における水の流水については、古くは、Wittmann, H., und Böes, P. (1938), 最近においては Einstein, H. A., und Harder, J. A. (1954) などの報告がある。けれどもこれらの報告には円周方向（彎曲部が円であるとすれば）の変化については説明が不充分である。

この点について筆者は流体力学の基礎方程式から出発して考えてみた。

いま、彎曲部を円弧の一部とし、彎曲部底面について考えてみると問題は2次元となる。

そこで、円の中心を原点とし、半径方向の速度を U , それに直角に反時計方向の速度を V , 外側半径を r_a , 原点より考えている点までの半径を r , 直線部から彎曲部の円弧に入る位置における半径より考えている点までの角ばを ϕ とし、水は彎曲部へ直線部から一様の流速 V_0 で流入するものとする。

すると運動方程式は

$$U \frac{\partial U}{\partial r} + V \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{V^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + V \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{UV}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

いま、直線水路を一様な流速 V_0 で流れている時よりの変化量を u , v および p として

$$U = 0 + u(r, \phi) \quad (4)$$

$$V = V_0 + v(r, \phi) \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_0^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p(r, \phi) \quad (6)$$

であるとすれば、これらの式を式(1), (2)および(3)に代入し、微少量を省略すれば

$$\frac{V}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - 2v \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7)$$

$$v_0 \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + u \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{\partial v}{\partial \phi} = 0 \quad (9)$$

を得る。これらの式(7), (8)および(9)が基礎方程式となり、これらの3つの式より u , v および p を解けばよいのである。

式(7)および(8)より p を消去し、それに式(9)を r について微分したものを代入すれば

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + r \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

を得る。この式の解は、 u が $\phi=0$ および彎曲外側縁において $u=0$ で且つ半径内側にゆくに従い u の値が増すことを考えればある常数を k として

$$u = k (e^{2\phi} - 1) \ell_n \frac{r_a}{r} \quad (10)$$

を得る。

つぎに式(9)の u に式(10)を代入し ϕ について積分し、 $\phi=0$ において $v=0$ なる条件を満足するようにすれば v の解として次式を得る。

$$v = k \left(\frac{e^{2\phi}}{2} - \phi - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \ell_n \frac{r_a}{r} \right) \quad (11)$$

つぎに式(8)の v および u に式(10)および(11)を代入して、 ϕ について積分し、 $\phi=0$ において $p=0$ なる条件を満足するようにすれば p/ρ の解として次式を得る。

$$\frac{p}{\rho} = k v_0 \left(\frac{e^{2\phi}}{2} - \phi - \frac{1}{2} \right) \left(1 - 2 \ell_n \frac{r_a}{r} \right) \quad (12)$$

これで、 u , v および p についての一般解は得られたわけである。

そこで、 u , v および p に含まれる関数を図示すれば図-2~4に示すとき曲線となる。

これらの図をみれば

u は ϕ が進むにつれて速度を増し、外側では零で内側に入るに従い速度を増す。

v はこれも u と同じく ϕ が進むにつれて速度を増し、水路外縁では速度が最大となる。

p/ρ は v とよく似た変化をする

ことが判る。

現在、外径 2.00 m、内径 1.70 m で深さか 20 cm の矩形断面を有する鉄板製水路において実験
中である。

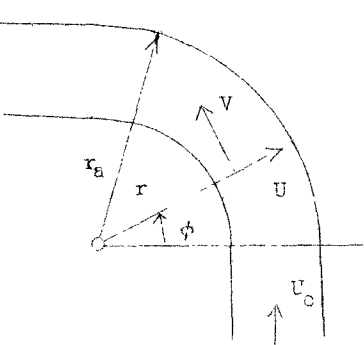


図 - 1

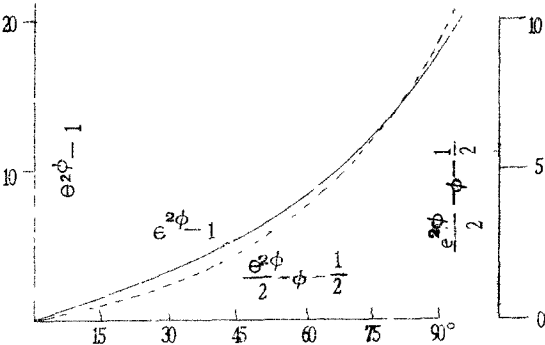


図 - 2

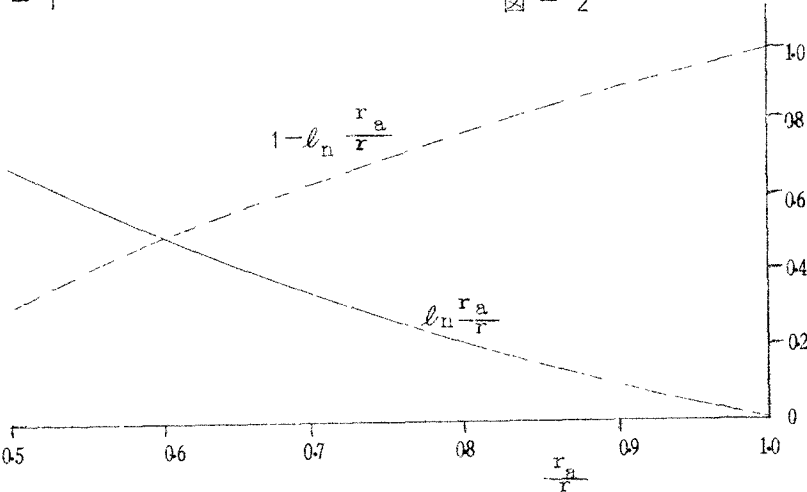


図 - 3

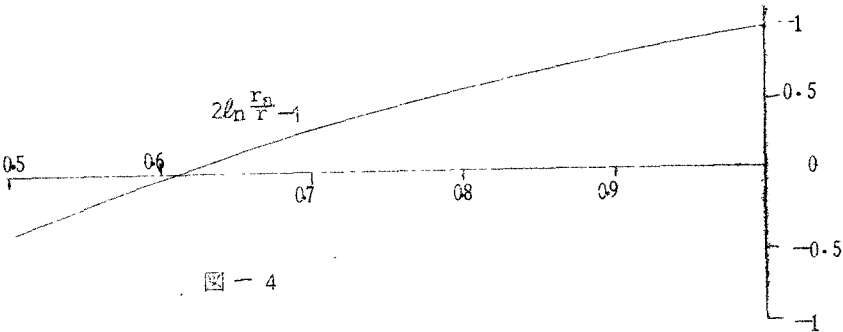


図 - 4