

(I-3) 一辺で弾性拘束した帯状板の熱応力状態

京大工学研究所 正員 森 忠 次
同 正員 小 林 昭 一

§1 解析方法

図-1のように半無限板に弾性拘束された帯状板を考え、両者間に一定の温度差

$T = T_0$ (const) がある場合の解析を試みる。

帯状板には添字 1, 半無限板には添字 2 をつけて区別する。添字を省いたものは両者に適用できることを示す。ここに E, ν, α はそれぞれ弾性係数 poisson 比および熱膨張係数である。

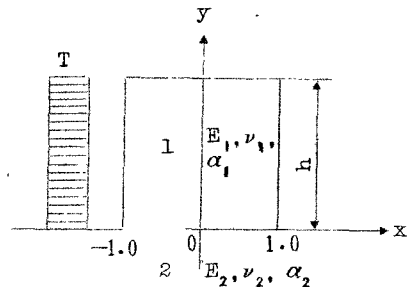


図-1

さて、帯状板が $X = \pm 1$ で X の方向に拘束されているとすると、帯状板には、

$$\sigma_{x,1}^0 = -\alpha_1 E_1 T_0, \quad \sigma_{y,1}^0 = \tau_{xy,1}^0 = 0 \quad (T_0 = T_1 - T_2) \quad (1)$$

なる応力が生じ、半無限板では、

$$\sigma_{x,2}^0 = \sigma_{y,2}^0 = \tau_{xy,2}^0 = 0 \quad (2)$$

である。

しかるに、図-1を考えると、 $X = \pm 1$ で X 方向の拘束はないから、 $X = \pm 1$ 辺上の X 方向の応力は零である。この条件を満足するためには、

$$p_{x,1} = \alpha_1 E_1 T_0, \quad p_{y,1} = 0 \quad (3)$$

なる附加外力を $X = \pm 1$ 辺上加える必要がある。

この附加外力によつて生じた応力を附加応力といい、 σ_x^+ , σ_y^+ , τ_{xy}^+ で表わすと、熱応力は、

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^+, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^+, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^+ \quad (4)$$

として求められる。

さて、添加応力を求めるために、応力かん数を、

$$\phi_1(x, y) = \phi_{0,1}(x, y) + \sum_n f_n(x) g_{n,1}(y) \quad (5)$$

とおく。ここで、 $\phi_{0,1}(x, y)$ は応力の境界条件を満足するように取り、 $f_n(x)$ は

$$f_n(\pm 1) = f'_n(\pm 1) = 0 \quad (6)$$

を満足するような正規直交多項式を採用する。¹⁾ こうすると、未知函数は $g_{n,1}(y)$ だけとなり、potential energy 最小の原理を適用して、若干の操作をすると、

Euler の方程式として次式が与えられる。

$$\begin{aligned} g_{n,1}^{IV}(y) - 2 \langle f'_n \cdot f'_n \rangle g_{n,1}''(y) + \langle f_n'' \cdot f_n'' \rangle g_{n,1}(y) \\ = - \int_{-1}^{+1} \nabla^4 \phi_{0,1}(x, y) \cdot f_n(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \quad \langle f_n^{(p)} \cdot f_n^{(p)} \rangle = \int_{-1}^{+1} f_n^{(p)} \cdot f_n^{(p)} dx$$

これを、つぎの境界条件の下で解いて、 $g_{n,1}(y)$ が求められる。

$$y=0 \text{ で、 } u_1=u_2, v_1=v_2; \quad \sigma_{y,1}^+ = \sigma_{y,2}^+ \quad \tau_{xy,1}^+ = \tau_{xy,2}^+ \quad \} \quad (8)$$

$$y=h \text{ で、} \quad \sigma_{y,1}^+ = 0, \quad \tau_{xy,1}^+ = 0$$

ここに、 u, v はそれぞれ X 方向および Y 方向の変位である。

たとえば図-1で、 $h=\infty$ とすると、(5) 式は、

$$\phi_1(x, y) = \frac{\alpha_1 E_1 T_0}{2} y^2 + \sum_n f_n(x) \cdot g_{n,1}(y) \quad \} \quad (9)$$

$$g_{n,1}(y) = e^{-\alpha_n y} (A_{n,1} \cos \beta_n y + B_{n,1} \sin \beta_n y)$$

となり、(8) 式の条件を用いると、未定定数 A_n, B_n は、

$$\alpha_1 E_1 T_0 X + \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) A_{n,1} - 2\alpha_n \beta_n B_{n,1} \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_1 A_{n,1} f_n'(x) \Bigg\}$$

$$\left. \begin{aligned}
&=K_1 \sum_n \left\{ (1-\nu_2) g_{n,1}(c) f'_n(x) + \frac{2}{\pi} g'_{n,1}(c) \int_{-1}^{+1} f'_n(\xi) \log \sqrt{x-\xi/d\xi} \right\} \\
&\sum_n \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} (\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) f''_n(x) - \nu_1 (-\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) \right\} \\
&f_n(x) + C = K \sum_n \left\{ -(1-\nu_2) g'_{n,1}(c) f_n(x) + \frac{2}{\pi} g_{n,1}(c) \int_{-1}^{+1} f'_n(\xi) \log \sqrt{x-\xi/d\xi} \right\}
\end{aligned} \right\} (10)$$

から定められる。ここに、

$$\bar{f}_n(x) = \int_0^x f_n(x) dx, \quad K = E_1/E_2,$$

また、 C は変位の基準点の取り方によつてきまる定数である。

(10) 式を全へての x にわたつて満足さすことは困難であるので、撰点法により 9 点 ($\pm 1, 0, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4, 0$) について、 $n=8$ まで取つて計算した。

§ 2 解析結果

簡単のため、 $\nu_1 = \nu_2 = 0, h = \infty$ として、 $K = E_1/E_2 = 1, 5, 10$ の各場合について解析した。応力分布の 1 例を示せば図-2 のようであり、 $y=0$ 上の平均応力の変化を $K = E_1/E_2$ を parameter として図示すると図-3 のようである。

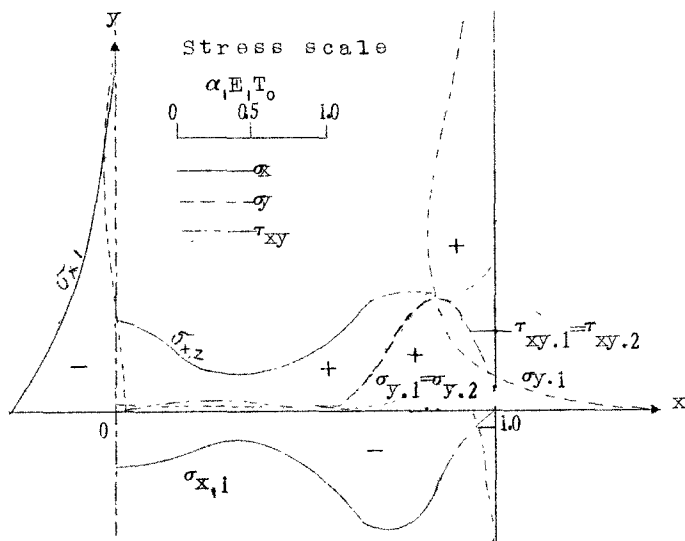


図-2 $K=1, \nu=0$ の場合の応力分布

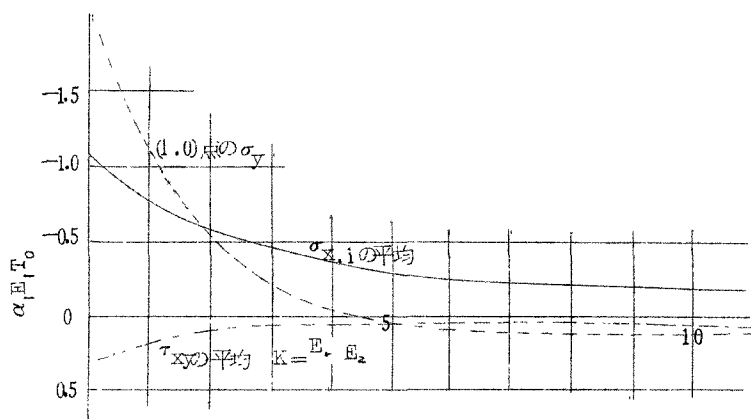


図-2 $K = 1$, $\nu = 0$ の場合の応力分布

参 考 文 献

- 1) G. Horvay and J. Born: Tables of Self-Equilibrating Functions, Journal of Mathematics and Physics, vol. 33, 1954, pp. 360~373