(I－2)　部分固定板の振動について

大阪市大工学部　正員　工博　倉　田　宗　章
同　　　　　　　正員　　　○岡　村　宏　一

要　旨　矩形板が部分的に固定された支持辺を持つ場合の自由振動の問題は従来ほとんど研究されていない。最近、太田・浜田両氏[1)]がこの問題について近似解を示したがわれわれは別個の見地から更に厳密な解法によつて取扱つた。

1）周辺に時間的変化をする単一モーメントを受ける矩形板。

図－1に示すように、周辺に板と同一の時間的変化をする単一モーメント、$M_u \cos\omega t$ を受ける周辺単純支持矩形板が自由振動をする場合のたわみWは次のように求められる。すなわち、板内の任意点（u，v）に同じ時間的変化をするunit load を受ける場合の板内の任意点（x，y）のt時刻におけるたわみを$\overline{W}$（u，v，x,y）とすれば

$$W = M_u \left| \frac{\partial \overline{W}}{\partial v} \right|_{v=0}$$

なる演算により求められ次式を得る。

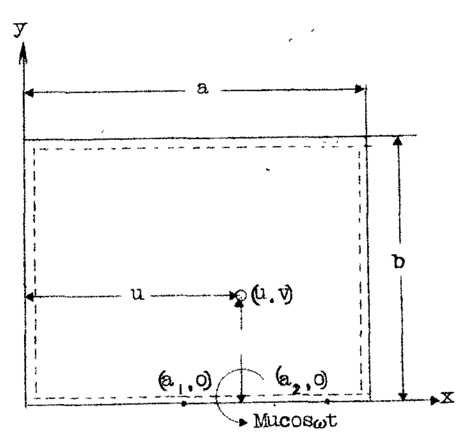
$$W = \frac{4a^3 M_u}{N\pi^3 b^2} \sum_m \sum_n \frac{n \sin\alpha_m u}{(m^2+\lambda_n^2)(m^2-\lambda_n'^2)} \sin\alpha_m x \sin\beta_n y \cos\omega t \tag{1}$$

たゞし　$\lambda_n = \sqrt{\mu + \frac{a^2}{b^2} n^2}$，$\lambda_n' = \sqrt{\mu - \frac{a^2}{b^2} n^2}$，

$\mu = \frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\rho h}{N}}$（不名数），$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$，

$\beta_n = \frac{n\pi}{b}$，N＝板の曲げ剛度，

h＝板厚，　ρ＝板の密度。



図－1

2）周辺に時間的変化をする任意区間の不静定分布モーメントを受ける矩形板。

図－１に示すような矩形板が、例えば $X = a_1$ より $X = a_2$ の間に分布するモーメントを受ける場合のたわみは式（１）より

$$W = \frac{4a^3}{N\pi^3 b^2}\sum_m\sum_n \frac{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha_m X\ \mathrm{Sin}\,\beta_n y}{(m^2+\lambda_n^2)(m^2-\lambda_n'^2)}\int_{a_1}^{a_2} M_u\ \mathrm{Cos}\,\omega t\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha_m u\,du$$

いま、モーメント分布関数 M_u は、E_s を未定常数として次のような三角級数によつて表わされるものと仮定する。

$$M_u = \sum_s E_s\,\mathrm{Sin}\,\frac{S\pi(u-a_1)}{r}$$

たゞし、$r = a_2 - a_1$ これを前式に代入して、

$$W = \frac{4a^3 r}{N\pi^4 b^2}\sum_s S E_s \sum_m\sum_n \frac{n\,\mathrm{Sin}\,\alpha_m x\ \mathrm{Sin}\,\beta_n y}{(m^2+\lambda_n^2)(m^2-\lambda_n'^2)}\cdot\frac{(-1)^S\,\mathrm{Sin}\,\alpha_m a_2 - \mathrm{Sin}\,\alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2}m^2 - S^2}$$

$$\times\ \mathrm{Cos}\,\omega t \qquad (2)$$

3）部分固定の条件　　前節2）より、$y = 0$ 辺のたわみ角を θ（u，x）とすれば

$$\theta(u,x) = \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{4a^3 r}{N\pi^3 b^3}\sum_s S E_s \sum_m\sum_n \frac{n^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha_m x}{(m^2+\lambda_n^2)(m^2-\lambda_n'^2)}$$

$$\times\frac{(-1)^S\,\mathrm{Sin}\,\alpha_m a^2 - \mathrm{Sin}\,\alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2}m^2 - S^2}\cdot \mathrm{Cos}\,\omega t \qquad (3)$$

いま、$a_1 < X < a_2$ の区間だけで、$\theta(u, x) = 0$ になることを要求するために式（3）を $a_2 - a_1 = r$ の区間で再び Fourier の級数に展開する。すなわちこの区間で正弦級数に展開して次の条件式を得る。

$$\theta_{(x)} = \sum_s s E_s \sum_m \sum_n \frac{n^2}{(m^2 + \lambda_n^2)(m^2 - \lambda_n'^2)} \cdot \frac{(-1)^k \sin \alpha_m a_2 - \sin \alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2} m^2 - k^2}$$

$$\times \frac{(-1)^s \sin \alpha_m a_2 - \sin \alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2} m^2 - s^2} = 0 \qquad (4)$$

式（4）は k，s の各値に対しμを含み未知常数 E_s に関して成立つ無限連立一次方程式であつて、これより板の自由振動の周期方程式として次の係数行列式を得る。

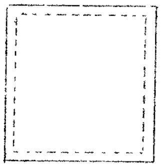
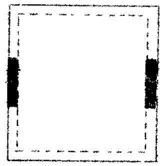
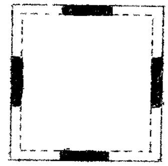
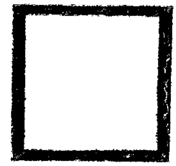
$$(a_{k,s}) \quad (k = 1, 2, 3 \ldots\ldots, S = 1, 2, 3 \ldots\ldots) = 0,$$

たゞし
$$a_{k,s} = \sum_m \sum_n \frac{n^2}{(m^2 + \lambda_n^2)(m^2 - \lambda_n'^2)} \cdot \frac{(-1)^k \sin \alpha_m a_2 - \sin \alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2} m^2 - k^2}$$

$$\times \frac{(-1)^s \sin \alpha_m a_2 - \sin \alpha_m a_1}{\frac{r^2}{a^2} m^2 - S^2} \qquad (5)$$

μは、この問題の固有値であつて式（5）の根として算出される。また、この方法は、容易に矩形板の周辺において任意の数カ所で固定された場合に拡張できる。

4）計 算 例　計算例として、正方形板の相対二辺の中央$\frac{1}{3}$区間固定、および四辺の中央$\frac{1}{3}$区間固定の場合について最小固有値μを求め、四辺支持および四辺固定の場合と比較した結果を図ー2に示す。

境界条件				
μ	2.000	2.767	3.442	3.646

図－ 2

1）太田．浜田，部分的に固定された支持辺を持つ長方形板のたわみ、振動
日本機械学会論文集（昭和３４年）