（特－2）　台風高潮の解析的研究について

京都大学工学部教授　理学博士　　山　田　彦　児

ここでは気象ないし海洋の研究者からの寄与のみを取上げます。しかも紹介者の不学のために不用意にまたは故意に大切な仕事を逸していることをあらかじめお断り申上げます。

この問題を強く刺戟したのは昭和9年秋の室戸台風でありまして、高潮を流体力学的に推算しようという努力も、これを契機として本格化したものと思われます。したがつて本報告もそれ以後のものだけを取扱います。室戸台風直後の種々の試験的計算の後に、港湾に関する本格的な計算が和達清夫氏によつて実行され〔1〕(*)，〔2〕，〔3〕，以後次才に整えられて来ました〔4〕〔5〕，その解析の要点を述べますと次のようであります。

今静水面に坐標軸Ox　Oyをとり、水平流速をu，v，水密度をρ，静水面からの水面上昇をζ，ヘッドで示した水面気圧（平均値からの偏差で高気圧がプラス）をP、渦動粘性係数を$\nu=\mu/\rho$としますと、ζが小さいという仮定の下に運動は殆んど水平であり、

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)-g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta+P)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)-g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta+P) \qquad (1)$$

という運動方程式が成立します。これをZについて深さ（$-h$，0）の間に平均して平均流速$\overline{\mu}$，$\overline{v}$の式とし、このときの連続方程式

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(h\overline{u})+\frac{\partial}{\partial y}(h\overline{v})=0 \qquad (2)$$

と組合わせますと、

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-g\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}_{Z=-h}$$
$$=g\frac{\partial}{\partial x}(hQ_x)+g\frac{\partial}{\partial y}(hQ_y) \qquad (3)$$

(*)〔　〕の中の数字は付録引用文献の番号を示します。

となり、ここに

$$Q_x = \frac{\partial P}{\partial x} - T_x / \rho g h \, , \, Q_y = \frac{\partial P}{\partial y} - T_y / \rho g h \tag{4}$$

であります。たゞし風速Vの時水面での応力Tx，Tyが、空気密度をρaとして、

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} , \mu \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} = (T_x , T_y) = 0,0026 \quad \rho_a |V| V \tag{5}$$

であることを取入れております。

Qx，Qy　は台風の作用を表わす既知関数として取扱い、(3)から未知の高潮ζを解くのでありますが、左辺の第四項すなわち水底摩擦項が不明のままであり、はじめの項は一先づこれをZoroと置くのが習慣でありました〔2〕，〔4〕，〔5〕，然しこれは水の動きに対して理想流体を仮定することになり、計算結果に疑を持たせます。とにかくこれによつて

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) - g\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = F\,(x, y; t) \, , \\ &F\,(x, y; t) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(g h Q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(g h Q_y) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

を得、これを解くには先つF＝0とおいたときの固有関数（静振）

$$X_m\,(x, y)\,e^{i\sigma_m t} , \quad m = 1, 2, 3, \cdots\cdots \tag{7}$$

を求めて、これらをもつて台風時のζ（x，y；t）を展開し：

$$\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cdot X_m\,(x, y) \, , \tag{8}$$

この係数$A_m(t)$を、（6）を充すごとくに定めるのであります。するとF（x，y；t）もまたX_m（x，y）で展開する必要が生じ：

$$F\,(x, y; t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(t) X_m\,(x, y) \, , \tag{9}$$

この既知の$B_m(t)$を用いて$A_m(t)$が

$$A_m(t)=\lambda_m^{-1}\int_0^t \sin{}' \lambda_m (t-\tau)\, d\tau B_m(\tau) \qquad (10)$$

として与えられます。

以上の二次元の一般方式をそのままの形で数値計算に移したものはありません。それの最大の理由は、固有振動の詳しい計算が無いからであります。大阪湾〔1〕、東京湾〔3〕、有明海〔4〕(*)など、すべて一次元近似の方法〔6〕を用い、横振動の計算にさえこの近似を技巧的に用います〔3〕、計算された結果は記録と同じOrder　を与えるようであります。Jane台風時の大阪湾高潮に全く二次元的な考察がなされましたが、もちろん定性的であります〔5〕

この計算で注意すべき点が二つあります、その一つは（9）の展開の精度であり、他は粘性の省略であります。展開について言えば、展開の項数を必要なだけいくらでも多くすることは事実上不可能であつて、台風の場合、中心近傍で急激な変化を示す強制項Fをそのままの姿で再現することができません。粘性につきましては簡単に

$$\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z},\ \nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=-h}=2K\,(h\bar{u},\,h\bar{v}) \qquad (11)$$

とおきますと（3）は

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+2K\frac{\partial\zeta}{\partial t}-g\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-g\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=F \qquad (12)$$

となり、これは容易に積分できます〔3〕、あるいは次のごとくします〔7〕、水表面から底までの流速u vの分布をZの二次式と考え、なお底面で滑るという近似を取入れますと、この分布は水面応力T_x, T_y　と、平均流速$\bar{u}$ $\bar{v}$と、底面における摩擦法則（線型を仮定）：

$$\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z},\ \nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{Z=-h}=\frac{\kappa}{\rho}(u,v)_{Z=-h} \qquad (13)$$

(*)標準台風からQ(x, t)を導く方法の詳細がこの論文の中に見られます。

によつて定まり、その分布式から

$$\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z},\ \nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{Z=-h}=\left(1+\frac{3\mu}{\kappa h}\right)^{-1}\left\{\left(\frac{3\nu}{h}\bar{u}-\frac{T_x}{2\rho}\right),\ \left(\frac{3\nu}{h}\bar{v}-\frac{T_y}{2\rho}\right)\right\} \tag{14}$$

が見出されます。これを（3）に用い、簡単化のために$3\nu h^{-2}\left(1+\frac{3\mu}{\kappa h}\right)^{-1}$を全水面に平均した値2Kを取入れますと(*)、やはり（12）に達しますが、しかし今度はFが異つて来て、その表式中のQ_x, Q_yが

$$Q_x'=\frac{\partial P}{\partial x}-\left(1+\frac{2\mu}{\kappa h}\right)\left(1+\frac{3\mu}{\kappa h}\right)^{-1}\frac{3T_x}{2\rho gh},\quad Q_y'=\cdots\cdots \tag{15}$$

で置換されます。特に底面で滑らないときには

$$Q_x'=\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{3T_x}{2\rho gh},\quad Q_y'=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{3T_y}{2\rho gh} \tag{15'}$$

となつて、これを（4）と比較しますと、風の作用が50% 大きく出ますが、実は丁度この形で浅水の場合の吹寄せに一致するという強味があります。（12）の取扱いは（6）と同一であります。

強制項F展開の不精密を避けるためには、かかる展開を行わないか、あるいは展開した後の剰餘に対して、（12）を直接に解くことを考えるべきでありますが、実行は困難であります。任意のQ(x)が、等速Vで等深の湖湾を通過するという一次元問題が解かれるのみであります〔7〕このとき湾幅と深度の変化を考慮できるならば、寄与するところ多かろうと思われます。

ところでここ十年の間に数値計算の機械が急速な発達を示したことは周知の通りでありまして、海洋学や気象学がこれを利用し始めたのもまた当然であります。そして気象潮の問題を先づ取上げたのはW：Hansen〔8〕であるらしく、彼は厳密な基礎式の書換えから出発しました。困難な解析的取扱いの間は止むを得ず不問に附した簡単化も、精密計算に際して再吟味を要することもちろんであります。

嵐に際しては混合が完全であるからρが一定であり、したがつて均一液体のNavier-Stokes方程式を基礎とするけれども、運動がほとんど水平面上での動きであるために鉛直(Z)の方向では常に静水圧が作用することを取入れて

(*) $\nu \propto h^{4/3}$と考えられますので、$K \propto h^{-2/3}$となり、浅い海ほど粘性が利いて来ます。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-fv+g\frac{\partial(\zeta+\frac{P}{g})}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\nu^*\triangle u+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=K_x,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+fu+g\frac{\partial(\zeta+P)}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\nu^*\triangle v+u\frac{\partial v}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=K_y,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

とします(*)。ここに $f=2\omega\sin\varphi$ (φは緯度) はCoriolis の常数、ν^* は水平混合の粘性係数、$\triangle$はxy 面でのLaplacian, K は体積力を意味します。h (x, y) を静水深、したがって $H\equiv h+\zeta$ を瞬間水深として平均流速を

$$(\overline{u},\overline{v})=\frac{1}{H}\int_{-h}^{\zeta}(u,v)\,dz$$

で導入し、これを用いて

$$u=\overline{u}+u_{\prime},\ v=\overline{v}+v_{\prime} \qquad (17)$$

と書き、(16)を平均して$\overline{u}\ \overline{v}$の表式に変化しますと、若干の書換えの後に

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-f\overline{v}+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}=-g\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{T_x}{\rho H}-\frac{1}{H}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=-h}+A_x\\
&\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+f\overline{u}+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{\nu}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}=-g\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{T_y}{\rho H}-\frac{1}{H}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=-h}+A_y\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(H\overline{u})+\frac{\partial}{\partial y}(H\overline{v})=0
\end{aligned}\right\}(18)$$

となり、ここに

(*) Hansen の場合は風潮または潮汐を目的としましたために基礎式からPが除かれています

$$\left.\begin{aligned}A_x&=K_x+\nu^*\triangle\bar{u}+\frac{\nu^*}{H}\int_{-h}^{\zeta}\triangle u_1\,dz-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}u_1^2\,dz-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}u_1v_1dz\\A_y&=K_y+\nu^*\triangle\bar{v}+\frac{\nu^*}{H}\int_{-h}^{\zeta}\triangle v_1\,dz-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}u_1v_1dz-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}v_1^2\,dz\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

でありまして、省略は一つもありません。そして尙幅が長さに較べて小さい場合には、上式を更に幅方向に平均して未知量を長さの方向に限ることができ、これはCrystal 近似の精密化に外なりません。

W. Hansen〔8〕、つゞいてG. Fischer 〔9〕が、上の方程式をdigital Computer を用いて積分することを研究しました。彼らの対象は風潮または潮汐でありましてそういう際には、数値的ならびに理想的評価の結果A_x, A_y および慣性項を省略してさしつかえなく、またHの代りにhを用いて方程式を線型化致しました。先に述べた解析的取扱いも全く同じ省略の上に立ち(*)、更に、日本で実行された唯一の範例である伊勢湾台風の計算器計算〔10〕においても同じであります。しかし台風の広域の風潮とは自ら相違するところがあり、仮定や省略は改めてまた吟味すべきであります。そこで今一般にComputer で見出される潮位の精度に影響すると思われる因子を並べて見ますと、(I)気象条件の精度、(II)水面および水底の摩擦力仮定、(III)省略項、特にν^*項と慣性項、(IV)境界条件、(V)数値計算の精度、となります。それで以下にこの各項目について気の付いたことを二、三申上げます。

(I)気圧傾度と風速風向は水域の全面にわたり、全時間を通じて知られていることを予定致しますが、これは現在全く覚束なく、推定によるか、または粗い近似公式を微分しまた自乗するという状態〔10〕ですから、実際との外れが大きく、他のすべての誤差を埋没するに足るかも知れません。

(II)大抵の場合〔5〕の公式が用いられますが、この係数決定の際のバラツキが大きくかつ風速とともに変化します〔11〕、水底摩擦に対しては

(*)小水域ではf＝0として良いのはもちろんです。

$$\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z},\ \nu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=-h}=\begin{cases} 0,0026\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\,(\bar{u},\bar{v})\ \text{(Hansen)}, \\ \dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{\nu}{h}(\bar{u},\bar{v})\ \text{(Fischer)}^{(*)}, \\ \dfrac{3\nu}{h}(\bar{u},\bar{v})-\dfrac{1}{2\rho}(T_x,T_y)\ \text{(気象庁)}^{(**)} \end{cases} \tag{19}$$

のごとく種々の仮定が用いられますが、前二者は充分深い水で無い限り矛盾を生じ、浅い海では才三者の方が合理的に見えます。しかしこのとき ν の値の推定が問題となり、若干の不確かさの入るのを避けられません。

(Ⅲ) 前述のごとく多くの省略を致しますが、その省略の影響を知つておく必要があります。才一に仮定された静水圧は壁の近くで成立せず、また ν^* 項の省略は、慣性項の省略とともに、壁附近の水位を誤算せしめます。しかしその影響は壁の附近に限られますから〔12〕，そこを対象としない限り省略は正当でありませう。しかし慣性項については問題が残ります。台風は擾乱場の移動であるために、この移動速度Vが潮波の速度 $\sqrt{gH}$ と一致する位置で特殊な共鳴現象を起す可能性があり、このとき粘性項と非線型項が高潮の高さと時間に対して大事な因子であろうと考えられるからでありますが、この問題は現在吟味中で確かなことはまだわかりません。Hをhで置換することも多くの問題を含んでおります。

(Ⅳ) 固定壁の境界条件は、壁を滑らかな曲線で置換え、縦流あらば適当な反射係数でこれを考慮すべきであります。しかしこの平滑化の結果は、上述の省略項の影響と相俟つて、岸の水位を全く信用できぬものとしますから、これはまた改めて考えるべきであります。計算は若干沖の水位を定め、この水位による岸の水位は模型実験によるべきであります〔13〕、境界の一部に流出入口を持つときには、この開放口の条件はかなり困難です。そこまたは外部の境界上で ζ または $(\bar{u},\bar{v})$ を附与しなければならず、その附与の正確さが問題であります。

(Ⅴ) 計算器にかけるには微分方程式を差分方程式に変更します。そのときx－，y－方向の差分△sと時間の歩み△tの間には、現在の方程式が双曲型であることのために

$$\frac{\Delta t}{\Delta s}<(2gH)^{-1/2} \tag{20}$$

(*)これは既に記した(11)に外なりません。(**)これは(14)で $\kappa=\infty$ としたものであります。

という条件が必要であります。このために深い水域のある場合の計算では、時間の歩みが小刻みとなり、逆に言えば$\triangle s$をあまり小さくはできないという不便があります。実算の例を見ますと、北海で $\triangle s=72\times 2\mathrm{Km}, \triangle t=20\mathrm{min}$〔9〕，伊勢湾で $\triangle s=2\times 2\mathrm{Km}, \triangle t=\frac{60}{1.1}\times 2\mathrm{sec}$〔10〕であります。北海で $\triangle s=37\times 2\mathrm{Km}, \triangle t=10\mathrm{min}$，として再計算した結果は前の場合と不一致を示すところがあり、伊勢湾にしても $\triangle s=4\mathrm{Km}$は もつと縮めたいところであります。計算機のことはよくわかりませんが、せめて浅くなるとともにもつと空間step を小さくして、計算の精度を上げたいように思えます。

以上のように見て来ますと、理論解析も数値計算も、まだ的確な予報のできる条件を具えることから若干遠いようでありますけれども一方伊勢湾計算〔10〕の成功は、それが思考の本筋を踏んでいることを示す一つの証左と見て良いのではないでしようか？

引　用　文　献

〔1〕和達清夫：大阪湾の静振及び副振動について、「海と空」18−3（昭13−3）

〔2〕同　　：台風によつて生ずる大阪湾の津波について、同上、18−12（昭13−12）
（それ以前の文献はこの論文の脚註にくわしい）

〔3〕和達清夫、松尾喜代子：台風によつて生ずる東京湾の津波について、同上19−3（昭14−3）

〔4〕寺田一彦：有明海の高潮について（九州大学農学部、昭和25年）

〔5〕市栄　誉：Jane台風による高潮について（1）中央気象台海洋報告2−2（昭26−12）

〔6〕H. Lamb：Hydrodynamics (6th ed.) pp.273−278参照

〔7〕H. Yamada：Theoretical estimation of meteorological high water, Rep. Res. Inst. Fluid Engn. Kyushu Univ., 6 no.2 (1950), pp.22−33.

〔8〕W. Hansen：Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und des Strömungen in Randmeeren nebest Anwendungen, Tellus 8 (1956), pp.287−300.

〔9〕G. Fischer：Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, Tellus 11 (1959), pp.60−76.

〔10〕気象庁
名古屋湾管理組合 伊勢湾高潮の綜合調査報告（昭35－3）

〔11〕G.H.Keulegan:Hydrodynamic Effects of Gales on Lake Erie, J.Res.Nat.Bur.Stand.50 no.2 (Feb. 1953), Res.paper no.2396.

〔12〕日高孝次：吹送循環流に関する研究（一）（二）（三）「海と空」17－10（昭12－10），18－1（昭13－1），18－9（昭13－9）.

〔13〕S.Ishiguro & A.Fujiki:An analytical method for the Oscillations of water in a bay or lake, using an electric network and an electronic analogue computer, J.Ocean.Soc.Japan, 11 (1955), pp. 191－197.