対数正規分布の常数について

京都大学防災研究所　角　屋　　睦

対数正規分布に関してはこれまでにも数多くの注目すべき研究がなされて来たが，本文は，これまでに主用ないし推奨されている3常数を含むSeade型分布の常数，適用限界を論及指摘しようとするものである。

I　下限常数を含む分布

$$\left.\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\zeta^2} \\ \zeta &= \log\frac{x+b}{x_0+b} = k\lg\frac{x+b}{x_0+b}, \qquad -b<x<\infty \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

1）積率による吟味

この分布の $x=-b$ の周りの i 次の積率は周知のように[1]

$$\left.\begin{aligned} \gamma_i &= \int_{-b}^{\infty}(x+b)^i\, dF(x) = e^{im}\lambda^{i2} \\ m &= \lg(x_0+b), \qquad \lambda = \exp\frac{1}{4k^2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

x の平均を $\bar{x}$，幾何平均を ${}_g x^{\circ}$ と書くと，まず x° と $\bar{x}$ の関係は(2)式で $i=1$ とおいた関係式より

$$\bar{x}+b = (x_0+b)\exp\frac{1}{4k^2}$$

$$\therefore x_0 \leqq \bar{x} \qquad (3)$$

つぎに x_0 と ${}_g x_0$ の大小関係は，元来

$$x_0 = \mathrm{anti}\ \overline{\log(x+b)} - b \qquad (4)$$

であることを考慮すれば

$$b \overset{\leqq}{>} 0 \quad ; \quad x_o \overset{\leqq}{>} {}_g x_o \tag{5}$$

変動係数 C_u，ヒズミ係数 C_s の関係は(2)式を用いて容易に導かれ，[2)]

$$\left.\begin{aligned} C_s &= \left(\frac{C_u}{\beta}\right)^3 + 3\left(\frac{C_u}{\beta}\right) > 0 \\ \beta &= 1 + b/\bar{x} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

これよりbの正負の限界が明らかになる。

$$b \overset{\leqq}{>} 0 \quad ; \quad C_s \overset{\geqq}{<} C_u{}^3 + 3C_u \tag{7}$$

ただし C_s は $1/k$ について単調増加関数であるから，$b<0$ のときは $-b<\bar{x}$ に限る。

結局分布によつては $C_s \overset{\geqq}{<} C_u{}^3 + 3C_u$ のいろいろの場合があり，岩井法の適用条件 $b \leqq 0$ は除去されるべきである。

2）確率紙による判定

データを大きさの順位に列べ大きい方よりS，$r=n-s+1$ 番目の値をとると

$$b = \frac{x_s x_r - x_o{}^2}{2x_o - (x_s + x_r)} \tag{8}$$

一般に(3)式を考慮すれば分母＜0，結局bの正負は分子の正負により支配される。対数確率紙の上にデータをプロットして，全体としての傾向が（図－1）

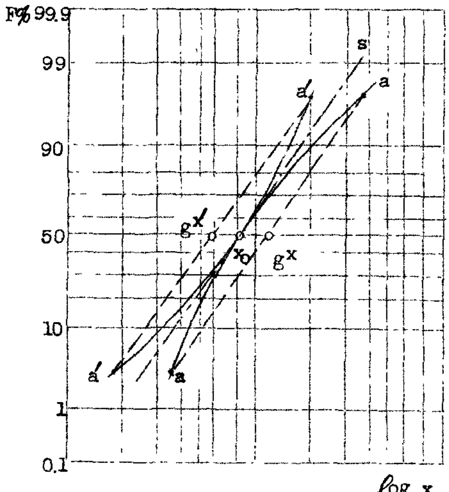

図 － 1

a 曲線状ならば
s 直線 〃
a^1 曲線 〃

$$x_s x_r \overset{\geqq}{<} x_o{}^2 \quad \therefore b \overset{\leqq}{>} 0 \tag{9}$$

何となれば，x_s，x_r を結ぶ直線が $F=50\%$ 線を切る点を ${}_g x$ とすると，曲線が50％線を切る点が x_o であるから，${}_g x$ と x_o の大小を比較すれば容易に(9)式の関係がわかる。これからも当然bに正負があつてよいことがわかる。なおこの分布は普通確率紙を用いた図－2では b' 曲線状になるとき適用可能である。

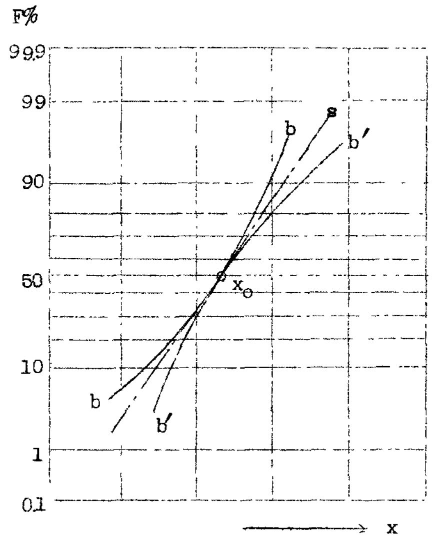

図 － 2

II　上限常数を含む分布

$$\zeta = \alpha \log \frac{g - x_0}{g - x} = k \lg \frac{g - x_0}{g - x} \tag{10}$$

1) 積率による吟味

この分布の g の周りの i 次の積率は

$$\left.\begin{aligned} V_i &= (-1)^i e^{im} \lambda^{i^2} \\ m &= \lg (g - x_0) \quad , \lambda = \exp (1/4k^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

前同様吟味の結果

$$x_0 \geqq \bar{x} \geqq_g x_0 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} C_s &= -\left(\frac{C_v}{\beta}\right)^3 - 3\left(\frac{C_v}{\beta}\right) < 0 \\ \beta &= \frac{g}{\bar{x}} - 1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

したがつて

$$g \gtreqless 2\bar{x} \quad ; \quad |C_s| \lesseqgtr C_v^3 + 3C_v \tag{14}$$

むろん　$g > \bar{x}$　に限る。

2）確率紙による判定

前同様1組の大小対応順位の値 x_s ， x_r をとり出して考えると

$$g = \frac{x_0{}^2 - x_s \cdot x_r}{2x_0 - (x_s + x_r)} \tag{15}$$

(12)式を考えると，分母，分子とも正であるが，(12)式を考えず確率紙上の性状を考えると，分子>0の条件は図1で a′曲線状，分母>0は図2でb曲線状，結局図2普通確率紙上でb曲線状になることがこの分布成立の必須条件となる。なお分子>0，分母<0および分子，分母とも負の場合は概念的に下限常数を含む分布の挙動に類似するが，結局は $g < \bar{x}$ のため事実上成立しない。

Ⅲ　下限0，上限gの分布

$$\zeta = \alpha \log \frac{x}{x_0} \cdot \frac{g - x_0}{g - x} = k\, l_g \frac{x}{x_0} \cdot \frac{g - x_0}{g - x} \tag{16}$$

1）積率による吟味

この分布の積率は一応岩井教授[3]によつて求められているが，a priori な評価は容易ではないのでreciprocal momentを考えると

$$\left.\begin{aligned} {}_{-1}\gamma_i &= e^{im} \lambda^{i^2} \\ \text{ただし}\quad m &= l_g \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{g}\right), \quad \lambda = \exp\left(\tfrac{1}{4}k^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

前同様の吟味方法をとると

$$\left.\begin{aligned} {}_{-1}C_s &= \left(\frac{{}_{-1}C_v}{\beta}\right)^3 + 3\left(\frac{{}_{-1}C_v}{\beta}\right) > 0 \\ \beta &= 1 - \frac{1}{g \cdot \bar{z}}, \quad z = 1/x \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

したがつてまた

$$\left.\begin{aligned} &g \leqq 0 && {}_{-1}C_s \leqq ({}_{-1}C_v)^3 + 3({}_{-1}C_v) \\ &g > 0,\ g\bar{z} > 1\ ; && {}_{-1}C_s > ({}_{-1}C_v)^3 + 3({}_{-1}C_v) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

結局この分布は ${}_{-1}C_s > ({}_{-1}C_v)^3 + 3({}_{-1}C_v)$ の場合より成立しないことになる。実際

上の問題としてはその都度reciprocal momentを考えるのは厄介であるから確率紙を用いた吟味を考えてみる。

2）確率紙による判定

データより1組の大小対応順位の値x_s，x_rをとり出すと，gキロとして

$$\gamma = 1 - \frac{g}{x_o} = \frac{(x_s - x_o)(x_o - x_r)}{x_s x_r - x_o^2} \tag{20}$$

一般に分子>0であるから

$$\left.\begin{array}{lll} x_s x_r - x_o^2 & \lesseqgtr 0 & g \gtreqless x_o \\ \quad〃 & = 0 & g \to -\infty \end{array}\right\} \tag{21}$$

したがつてこの分布が成立するためには$x_s x_r - x_o^2$でなければならぬ。これは対数確率紙図1においてa'曲線状をとる場合に限る。逆にこれからC_sとC_uの関係を求めると

$$C_s < C_v^3 + 3C_v \quad ; \quad g > x_o > 0 \tag{22}$$

がかわる。

以上の結果よりすれば一般に水文統計では$C_s > 0$のことが多いので，$b \leqq 0$の条件を除去して下限常数を含む式を適用するのがよいと思われる。本稿を纏めるに際し岩井教授より御指導鞭撻を戴いた。記して謝意を表する。

1）石原藤次郎・高瀬信忠；土木学会論文集47号（1957）

2）S，Iwai ； Proc，A，S，C，E Vol81 No.709（1956）

3）岩井重久；土木学会論文集4号 （1949）