道路交通流の安全度について

京都大学工学部　　佐佐木　　綱

交通量が増大し混雑を呈してくると，追い越しはほとんど不可能となり，各自動車は先行の車に追従しているだけであるという状態が観察されるようになつてくる。本文はこのような場合の交通流の安全性について理論的に考察したものである。

1　交通流の基礎方程式

追い越しが行われず単に前の車に追従している交通流の運動方程式は先行車の座標及び速度を $v_k(t)$ 及び $v_k(t)$，後続車の座標及び速度を $x_{k+1}(t)$ 及び $v_{k+1}(t)$ とすると式(1)で表わされる。

$$v_{k+1}(t)=f\left[x_k(t-T)-x_{k+1}(t-T),\ v_k(t-T)\right] \tag{1}$$

ここに f は運転手の経験によつて定められる関数である。本文では解析を簡単ならしめるために式(1)の右辺が1次式の場合を考える。

すなわち

$$x_k(t-T)-x_{k+1}(t-T)=\alpha v_k(t-T)+\beta v_{k+1}(t)+b_0 \tag{2}$$

ここに α，β 及び b_0 はすべて常数である。T は運転手の反応時間である。便宜上これらの常数を　$\alpha=-mT$，$\beta=nT$（ただし $m\geqq 0$，$n\geqq 0$）とおくと式(2)は次のごとくなる。

$$v_k(t-T)-v_{k+1}(t-T)=-mT\dot{v}_k(t-T)+nTv_{k+1}(t) \tag{3}$$

式(3)を基礎として先行車のあらゆる挙動変化に対して後続車の運動を求めることができる。

2　交通流の安全度

これまでの研究で交通流の安定性については多くの有益な結果が得られたので，更に安全性の問題について検討した。特に街路交通等では先行車の運動は近似的に正弦波状と考えることができるので，先行車が

$$\begin{aligned} v_1(t)&=v_0-A\sin wt, & t&\geqq 0 \\ &=v_0, & t&<0 \end{aligned} \tag{4}$$

で表わされる変化を行つたときの後続車の運動について考えてみる。ここに $v_0\geqq A$ としておく。

われわれが問題としているのは，後続車が先行車に追突するかどうかということであるから，まず車頭間隔について考えてみよう。

$t<0$ に対して両車とも等速度 v_0 で走つているのであるから，このときの車頭間隔は $(n-m)Tv_0+b_0$ である。従つて式(4)で表わされる変動を受けた場合の，その後の車頭間隔は

$$\gamma(t)=(n-m)Tv_0+b_0+\int_0^t v_1(t)\,dt-\int_0^t v_2(t)\,dt \tag{5}$$

で表わされる。ここに $\lim_{t\to 0}\gamma(t)=(n-m)Tv_0+b_0$ と定義しておく。式(5)を計算するためにまず

$$\Gamma(t)=\int_0^t v_1(t)\,dt-\int_0^t v_2(t)\,dt \quad \cdots\cdots \tag{6}$$

を求める。上式のラプラス変換をとると

$$\Gamma(s)=\left[V_1(s)-V_2(s)\right]/s \quad \cdots\cdots \tag{7}$$

となり，$V_2(s)$ は式(3)から求められるので，

$$V_2(s)=\frac{e^{-Ts}(1+mTs)}{nTs+e^{-Ts}}V_1(s)-\frac{nTe^{-Ts}}{nTs+e^{-Ts}}v_1(0)+\frac{nT}{nTs+e^{-Ts}}v_2(0)$$

従つて

$$\Gamma(s)=\frac{nT-mTe^{-Ts}}{nTs+e^{-Ts}}V_1(s)+\frac{mTe^{-Ts}}{s(nTs+e^{-Ts})}v_1(0)-\frac{nT}{s(nTs+e^{-Ts})}v_2(0) \tag{8}$$

が成立する。初期条件は式(4)から

$$v_1(0)=v_2(0)=v_0$$

$$V_1(s)=v_0/s-A\omega/(s^2+\omega^2) \quad \cdots\cdots \tag{9}$$

式(9)を式(8)に代入すると

$$\Gamma(s)=-\frac{A\omega(nT-mTe^{-Ts})}{(s^2+\omega^2)(nTs+e^{-Ts})}\equiv-\frac{P(s)}{Q(s)} \quad \cdots\cdots \tag{10}$$

が得られ，その逆変換として

$$\Gamma(s)=-\frac{A\omega}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{nT-mTe^{-Ts}}{(s^2+\omega^2)(nTs+e^{-Ts})}e^{st}\,ds \quad \cdots\cdots \tag{11}$$

が成立する。それゆえ式（11）の特性根の留数を求めればよい。 $nTs+e^{-Ts}=0$ の根

$S_i = -\sigma_i + j\omega_i$ は

$$\sigma_i = \frac{\omega_i}{\tan\omega_i T}, \quad \omega_i = \pm\sqrt{\frac{e^{2\sigma_i T}}{(nT)^2} - \sigma_i^2}$$

から決定されるが，$e^{st}P(s)/Q(s)$ の極 $s = S_i$ における留数は

$$e^{S_i t} P(S_i)/Q'(S_i) = A\omega \frac{1+m\tau S_i}{(S_i^2+\omega^2)(1+TS_i)} e^{S_i t}$$

であり，$\sigma_i > 0$ であるかぎり，時間 t の経過とともに消滅していく。

一方，$s^2+\omega^2=0$ の根 $s=\pm j\omega$ における留数は

$$Re^{j\omega t} = AT\frac{n(-n\omega T+\sin\omega T+m\omega T\cos\omega T)+j(m-mn\omega T\sin n\omega T-n\cos\omega T)}{2(1+n^2\omega^2T^2-2n\omega T\sin\omega T)} \cdot e^{j\omega t}$$

及び

$$R'\bar{e}^{j\omega T} = AT\frac{n(-n\omega T+\sin\omega T+m\omega T\cos\omega T)-j(m-mn\omega T\sin\omega T-n\cos\omega T)}{2(1+n^2\omega^2T^2-2n\omega T\sin\omega T)} \cdot e^{-j\omega t}$$

で与えられるので

$$|R| = |R'|, \quad \arg R = -\arg R'$$

なる関係式を利用して

$$\Gamma(t) = -2|R|\cos(\omega t+\arg R) \qquad \cdots\cdots (12)$$

をうることができる。　さらに

$$V = 2R/AT \qquad \cdots\cdots (13)$$

とおくと式 (12) は

$$\Gamma(t) = -AT|V|\cos(\omega t+\arg V) \qquad \cdots\cdots (14)$$

で表わされる。　ここに

$$\left.\begin{aligned} |V| &= \sqrt{\frac{n^2+m^2-2mn\cos\omega T}{1+n^2\omega^3T^2-2n\omega T\sin\omega T}} \\ \arg V &= \tan^{-1}\frac{m-mn\omega T\sin\omega T-n\cos\omega T}{n(-n\omega T+\sin n\omega T+m\omega T\cos\omega T)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (15)$$

で与えられる。

従つて式 (14) を式 (5)に代入すると

$$\gamma\ (t) = (n-m)\ Tv_0 + b_0 - AT\,|V|\cos\ (\omega t + \arg V) \quad\cdots\cdots\cdots \qquad (16)$$

が得られる。

式 (16) で表わされる車頭間隔で追従しているときに，急に先行車が全制動をかけたとする。このときに，急に後続車の運転手は反応時間 T だけ遅れてあわてて急制動をかけるであろう。この反応時間のあいだに後続車の空走する距離は

$$\int_t^{t+T} v_2\,dt = v_0 T - ATW\sin\ (\omega t + \phi') \qquad (17)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{2}{\omega T}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\sqrt{\frac{1+m^2\omega^2T^2}{1+n^2\omega^2T^2-2n\omega T\sin\omega T}} \\ \phi' &= \frac{\omega T}{2} + \tan^{-1}\frac{m\omega T - n\omega T\cos\omega T - mn\omega^2T^2\sin n\omega T}{1-n\omega T\sin\omega T + mn\omega^2T^2\cos\omega T} \end{aligned}\right\}\cdots \qquad (18)$$

である。また先行車及び後続車の制動距離をそれぞれ$\mu_1 v_1^2$，$\mu_2 v_2^2$とすると，後続車が先行車に追突しないためには

$$(n-m-1)\ Tv_0 + b_0 - b - AT\,|V|\cos\ (\omega t + \arg V) + ATW\sin\ (\omega t + \phi')$$
$$> \mu_2 v_2^2\ (t+T) - \mu_1 v_1^2\ (t) \qquad\cdots (19)$$

でなければならない。われわれはこのような交通流の追突の安全性を定量化するのに式 (19) を利用し，任意の時間 t において式 (19) が成立する確率をもつてその交通流の安全度と定義する。本文ではこのような安全度が道路の状態によつてどのように変るかを述べる。