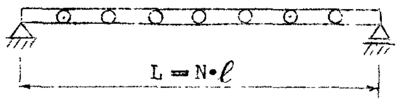
デジタル計算器による
弾塑性桁の動力学的研究

京都大学工学部　山田善一
○京都大学大学院　寺田弘

本研究は，主として橋梁をその対象として，移動荷重をうける弾塑性桁の動力学的性状の解析方法の一つについてのべるものである。

近年構造物の解析には，弾塑性状態または剛塑性状態にまで立ち入つて行うのが合理的であると認められて来ているが，土木構造物，特に橋梁においては，移動荷重を取扱うため，その解析が非常に困難な問題となつている。本研究は・桁を物理的にRigid Bar とヒンジで連結されたもので近似し（図一1），塑性ヒンジの生ずる位置，ならびにその伸展は，近似した桁のヒンジによつて代用されるものとしている。

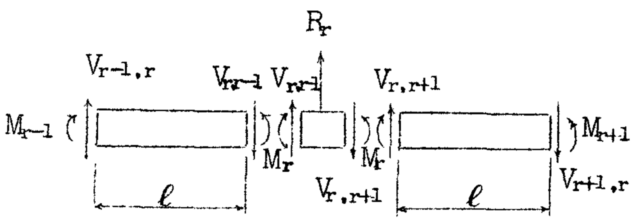


図一 1

またこのように近似することにより，高速度計算器の利用が容易となる。

1．Rigid Bars と弾塑性ヒンジによる桁の近似

図一2に示すようなModelで桁を近似する。しかるとき内力R_rはヒンジに生ずるモーメント M_rにより次の関係で表わされる。



図一 2

$$\left(\frac{1}{\ell}\right)(M_{r-1}-2M_r+M_{r+1})=-R_r \tag{1}$$

またモーメント M_rはたわみyを用いて

$$M_r=\left(-\frac{B_r}{\ell}\right)(y_{r-1}-2y_r+y_{r+1}) \tag{2}$$

で与えられる。もし $B_r = EI_r / \ell$ とすれば，式(1)(2)は桁のたわみの微分方程式を階差式により示したものに一致する。

たゞし，Mr は一定の塑性モーメント Mo より大きくはならないから式(2)で Mr＞Mo の場合には，Mr＝Mo として式(1)に入れねばならない。

2．移動荷重による Response の遂次近似解法

2階の微分方程式の数値解法に対する Newmark のβ法[1)2)]によつて，時間 $t=(n+1)\triangle t$ における点 r のたわみ及びたわみ速度は，式(3)(4)の如く示される。これらの式には式(5)〜(8)の無次元量を用いている。

$$\eta_{r,n+1} = \eta_{r,n} + \dot{\eta}_{r,n}h + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\eta}_{r,n}h^2 + \beta\ddot{\eta}_{r,n+1}h^2 \tag{3}$$

$$\dot{\eta}_{r,n+1} = \dot{\eta}_{r,n} + (1-\gamma)\ddot{\eta}_{r,n}h + \gamma\ddot{\eta}_{r,n+1}h \tag{4}$$

$$\eta_{r,n} = y_{r,n} / \ell \tag{5}$$

$$\dot{\eta}_{r,n} = d\eta_{r,n} / d\tau \tag{6}$$

$$\tau = \sqrt{P_0 g L / M_0} \cdot t \tag{7}$$

$$h = \sqrt{P_0 g L / M_0} \cdot \triangle t \tag{8}$$

但し

$y_{r,n}$ ＝ 時間 t における点 r のたわみ

ℓ ＝ 一個の Rigid Bars の長さ

$\triangle t$ ＝ 遂次計算の行われる時間間隔

次に式(1)を用いて点 r のたわみ加速度は，

$$\ddot{\eta}_{r,n+1} = \frac{1}{(\bar{m}_{r,n+1}) + (m_r)}\left[P_r + \frac{L}{4\ell}\left(\mathfrak{M}_{r-1} - \mathfrak{M}_r + \mathfrak{M}_{r+1}\right)\right] \tag{9}$$

で与えられる。この式には次の無次元量が用いられている。

$$(\bar{m}_{r,n+1}) = \bar{m}_{r,n+1}\, gL / M_0 \tag{10}$$

$$(m_r) = m_r gL / M_0 \tag{11}$$

$$\mathscr{M}_r = {}^{M_r}/_{M_0} \tag{12}$$

$$p_r = {}^{P_r}/_{P_0} \tag{13}$$

但し

$\bar{m}_{r,n+1}$ ＝ 点rに集中して作用する活荷重

m_r ＝ 点rに集中して作用する死荷重

P_r ＝ 近似した桁の点rに作用する活荷重

P_0 ＝ スパン中央に作用したとき，同点にM_0 を生じさせるような荷重

無次元量モーメント$\mathscr{M}_r$はη_rの関係として

$$\mathscr{M}_r = \left(\frac{1}{\rho_0}\right)\left(-\eta_{r-1} + 2\eta_r - \eta_{r+1}\right) \tag{14}$$

で与えられる。但し

$$\rho_0 = {}^{\ell M_0}/_{EI_r}$$

式(3)(4)(9)および (14) を用いれば，通常の逐次近似解法によつて時間 $t = (n+1)\,\triangle t$，即ち $\tau = (n+1)\,h$ の時の桁の Response がもとめられる。

無次元量モーメント$\mathscr{M}_r$ は1より大きくはならないから，式 (14)において$\mathscr{M}_r > 1$ なる場合は，$\mathscr{M}_r = 1$ を式(9)に代入する。

式(9)に示されるように，この近似解法では活荷重の慣性力の影響は容易に計算されうる。

又このような逐次解法の場合には，解の収斂性が問題となるが，この計算の場合には，桁の分割数がふえるほど収斂性は悪くなり，また時間の分割数がふえるほど収斂性は良くなる。従つて，計算にさいしては，実用上充分と思われる桁の分割数に対して適合した時間の分割を取ることが必要であり，このため高速度計算器によつてのみ，十分なる解析が行われうることになる。

3．ヒステリシス特性について

弾塑性ヒンジは，図－3に示すように，理想的弾塑性の性質をもつものとし，最大変形の位置から逆に運動した場合は，いわゆる，ヒステリシスの特性をもつものと考える。

図－3においてモーメントの状態としては，A点もB点も同一であると考えられるから，B点よりA点の状態を取扱う方が容易である。よつて計算されたたわみより塑性変形量を各点より減じ，常にA点の状態となるようにしておく。

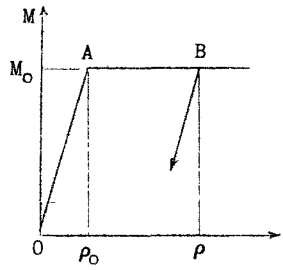
点r_{pl}において角変化が降伏点のρ_{pl}となつた場合，ρ_{pl}による点r_sの塑性変形量は次のように表わされる。

$r_s \leqq r_{pl}$では

$$\eta_{r_s, pl} = \rho_{pl}(r_s - r_{pl}r_s/N) \qquad (15)$$

$r_s \geqq r_{pl}$では

$$\eta_{r_s, pl} = \rho_{pl}\ (r_{pl} - r_{pl}r_s/N) \qquad (16)$$



図—3

但し

$$N = L/\ell$$

4．数値計算例

桁の分割数N＝2，時間分割数n＝16の単純桁の場合は，卓上計算器によりp_r＝1.0，0.8；h＝0.20，0.10，0.075及び0.050について行つた。ここにL＝20mとすれば，移動荷重の移動速度は上のhに対応してそれぞれv＝44.6，89.1，118.8及び178.2(㎞／h）となる。桁分割数N＝4，時間分割数n＝64の場合には，FACOM 128Bにより，N＝2，n＝16のp_r＝1，h＝0.075，0.050に対応して，それぞれh＝0.026516504，0.017677670として計算した。又連続桁など不静定構造物についても，現在解析を進めている。

なお計算結果の詳細，ならびにFACOM 128Bに対するプログラミングについては，講演会にてのべる。

参　考　文　献

1) N.M.Newmark, "Computation of Dynamic Structural Responses in the Range Approaching Failure" Proc of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structure, 1952

2) N.M.Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics" Proc. ASCE Vol. 85. No. EM3, 1959