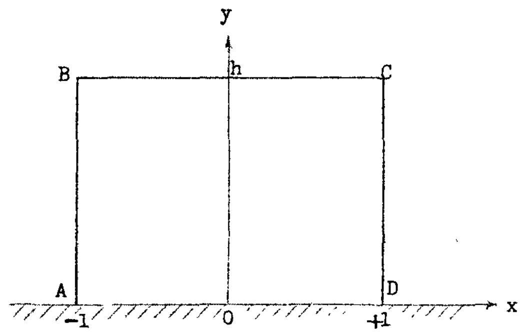
一辺固定矩形板の熱応力状態について

京都大学工学研究所　森　忠次
○京都大学 大学院　小林昭一
関西電力 建設部　足立隼夫

§1．解析方法

本研究では一辺が完全に拘束された矩形板の二次元熱応力問題の解析結果を述べる。矩形板の四辺の境界条件を満足する解を求めることは困難であるので，potential energy 最小の原理により変分問題として解いた。変分法により近似解を求める方法は種々あるが，ここでは偏微分方程式の積分を連立常微分方程式の積分に変換する L.V.Kantrovichの方法によつた。[1)]

図に示すような矩形板ABCD（厚さd，辺ADは固定）のみにT(x，y)なる温度変化を生じ，平面応力状態にあるものとする。矩形板が原形を保つための応力は



図—1　矩形板および坐標

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = -\alpha ET/(1-\nu) \quad (1)$$

であり，この応力状態に

$$\left.\begin{aligned} &\text{表面力};\ p_x = p_y = \alpha ET/(1-\nu) \\ &\text{容積力};\ X = -\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial x},\quad Y = -\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

によつて与えられる外力による応力状態を附加すれば其の応力状態を求めることができる。

$$X = -\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial y}$$

とし，(2)式による応力をつぎのようにおく。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_{yy}(x,y) = \phi_{0,yy}(x,y) + \Omega(x,y) + \sum_n f_n(x)\, g_n''(y) \\ \sigma_y &= \Phi_{xx}(x,y) = \phi_{0,xx}(x,y) + \Omega(x,y) + \sum_n f_n''(x)\, g_n(y) \\ \tau_{xy} &= -\Phi_{xy}(x,y) = -\phi_{0,xy}(x,y) - \sum_n f_n'(x)\, g_n'(y) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここに，ϕ_0 は (2)式に示された応力についての境界条件を満足し，y＝一定なる断面における応力の合計が常に零なるものとする。$g_n(y)$ は未知函数であり，$f_n(x)$ は y＝一定なる断面での合力が常に釣合つていることを考え

$$f(\pm 1)=f'(\pm 1)=0 \tag{4}$$

を満足する既知正規直交函数とする。この函数は G．Hervay の提案になるものである。[2)]

potential energy は

$$W=\frac{1}{2E}\int_0^h\int_{-1}^{+1}\left\{\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\nu\sigma_x\sigma_y+2(1+\nu)\tau_{xy}^2\right\}dx\,dy \tag{5}$$

で表わされ，この式に(3)式を代入し，$f(x)$ が直交函数なることを利用して，微小項を省略するとつぎの Euler の方程式ならびに自然境界条件が求められる。

$$g_n''''(y)-2\langle f_n'\cdot f_n'\rangle g_n''(y)+\langle f_n''\cdot f_n''\rangle g_n(y)=-\int_{-1}^{+1}\left\{\triangle\triangle\phi_0(x,y)+(1-\nu)\triangle\Omega(x,y)\right\}\times f_n(x)\,dx \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&g_n'''(0)-(2+\nu)\langle f_n'\cdot f_n'\rangle g_n'(0)=-\int_{-1}^{+1}\left\{\phi_{0yyy}(x,0)+(2+\nu)\phi_{0xxy}(x,0)+(1-\nu)\Omega_y(x,0)\right\}\times f_n(x)\,dx\\
&g_n''(0)+\nu\langle f_n'\cdot f_n'\rangle g_n(0)=-\int_{-1}^{+1}\left\{\phi_{0yy}(x,0)-\nu\phi_{0xx}(x,0)+(1-\nu)\Omega(x,0)\right\}f_n(x)\,dx
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ここに $\langle f_n^p\cdot f_n^p\rangle=\int_{-1}^{+1}f_n^p(x)\cdot f_n^p(x)dx$ である。(6)の一般解は

$$g_n(y)=e^{-\alpha_n y}(A_n\cos\beta_n y+B_n\sin\beta_n y)+e^{\alpha_n y}(C_n\cos\beta_n y+D_n\sin\beta_n y)+G_n(y) \tag{8}$$

となり，ここに $r_n=\alpha_n+i\beta_n$ は特性方程式の根であり，$G_n(y)$ は(6)式の特解である。

§2．計 算 例

(A) $T=T_0$ (一定) の場合　　$\phi_0=\alpha E T_0 y^2/2$，$\Omega=0$ となる。

(i) $h=\infty$：　$C_n=D_n=0$ であり，(7)式の境界条件は

$$\left.\begin{aligned}
&-\alpha_n\left\{(\alpha_n^2-3\beta_n^2)-K_n(2+\nu)\right\}A_n+\beta_n\left\{(3\alpha_n^2-\beta_n^2)-K_n(2+\nu)\right\}B_n\\
&+\alpha_n\left\{(\alpha_n^2-3\beta_n^2)-K_n(2+\nu)\right\}C_n+\beta_n\left\{(3\alpha_n^2-\beta_n^2)-K_n(2+\nu)\right\}D_n=0\\
&\left\{(\alpha_n^2-\beta_n^2)+K_n\nu\right\}A_n-2\alpha_n\beta_nB_n+\left\{(\alpha_n^2-\beta_n^2)+K_n\nu\right\}C_n+2\alpha_n\beta_nD_n=-L_n
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここに，$K_n=\int_{-1}^{+1}f_n'\cdot f_n'dx$，$L_n=\int_{-1}^{+1}\phi_{0,yy}\cdot f_n\,dx$ である。

(ii) h＝有限： (9)式の他に $y = h$ において $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ なるつぎの境界条件が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&(e^{-\alpha_n h}\cos\beta_n h)A_n + (e^{-\alpha_n h}\sin\beta_n h)B_n + (e^{\alpha_n h}\cos\beta_n h)C_n + (e^{\alpha_n h}\sin\beta_n h)D_n = 0 \\
&- e^{-\alpha_n h}(\alpha_n\cos\beta_n h + \beta_n\sin\beta_n h)A_n - e^{-\alpha_n h}(\alpha_n\sin\beta_n h - \beta_n\cos\beta_n h)B_n \\
&+ e^{\alpha_n h}(\alpha_n\cos\beta_n h - \beta_n\sin\beta_n h)C_n + e^{\alpha_n h}(\alpha_n\sin\beta_n h + \beta_n\cos\beta_n h)D_n = 0
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

(B) $T = T_0(h - y)$ の場合　$\phi_0 = \alpha E T y\left(h - \dfrac{y}{3}\right)/2$ ，$\Omega = 0$ となる。

境界条件はつぎの通りである。

$$\left.\begin{aligned}
&-\alpha_n\{(\alpha_n^2 - 3\beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}A_n + \beta_n\{(3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}B_n \\
&+\alpha_n\{(\alpha_n^2 - 3\beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}C_n + \beta_n\{(3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}D_n = -M_n \\
&\{(\alpha_n^2 - \beta_n^2) + K_n\nu\}A_n - 2\alpha_n\beta_n B_n + \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2) + K_n\nu\}C_n + 2\alpha_n\beta_n D_n = -L_n \\
&e^{-\alpha_n h}\cos\beta_n h\cdot A_n + e^{-\alpha_n h}\sin\beta_n h\cdot B_n + e^{\alpha_n h}\cos\beta_n h\, C_n + e^{\alpha_n h}\sin\beta_n h\cdot D_n = 0 \\
&- e^{-\alpha_n h}(\alpha_n\cos\beta_n h + \beta_n\sin\beta_n h)A_n - e^{-\alpha_n h}(\alpha_n\sin\beta_n h - \beta_n\cos\beta_n h)B_n \\
&+ e^{\alpha_n h}(\alpha_n\cos\beta_n h - \beta_n\sin\beta_n h)C_n + e^{\alpha_n h}(\alpha_n\sin\beta_n h + \beta_n\cos\beta_n h)D_n = 0
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

こゝに，$M_n = \int_{-1}^{+1}\phi_{0,yyy}\cdot f_n\,dx$ である。

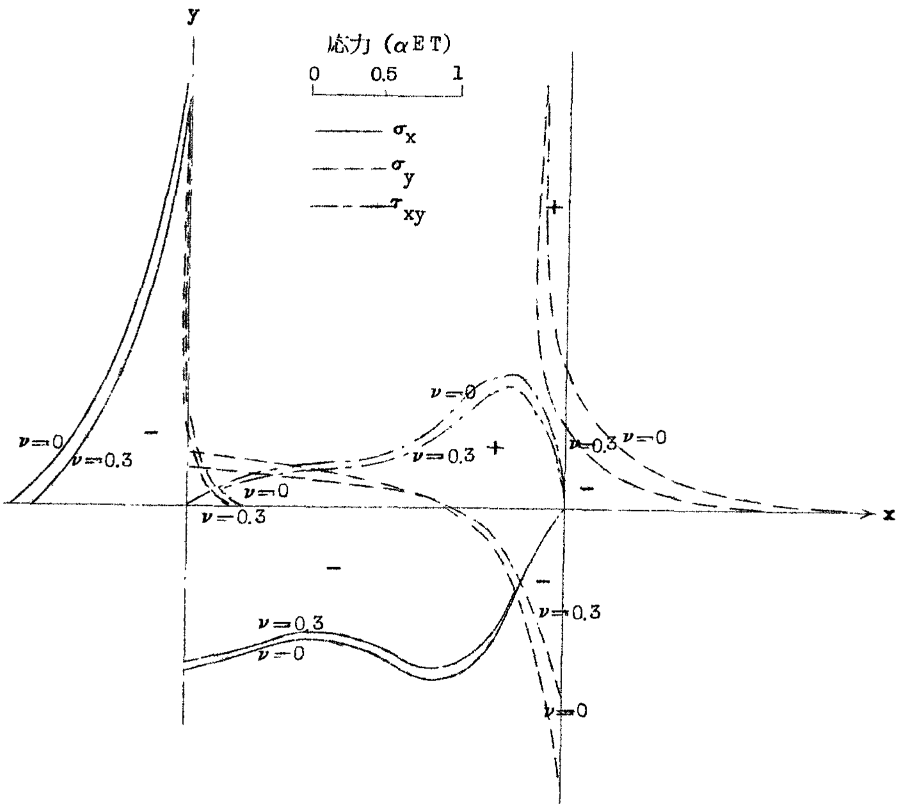
(C) $T = T_0 x$ の場合　$\phi_0 = -\alpha E T_0 x^3/6$ ，$\Omega = \alpha E T_0 x$ となる。

$h = \infty$ の場合には，$C_n = D_n = 0$ であり，境界条件はつぎの通りである。

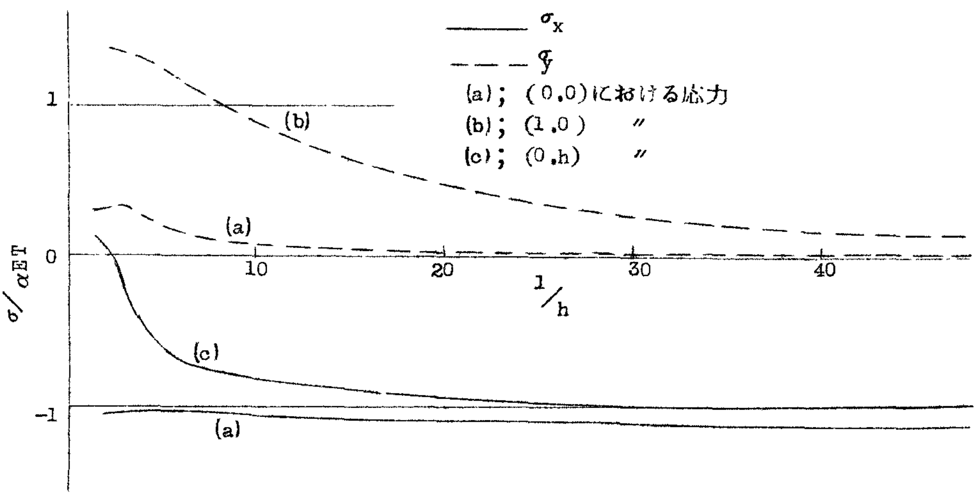
$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_n\{(\alpha_n^2 - 3\beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}A_n - \beta_n\{(3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - K_n(2+\nu)\}B_n = 0 \\
&\{(\alpha_n^2 - \beta_n^2) + K_n\nu\}A_n - 2\alpha_n\beta_n B_n = -L_n'
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

こゝに，$L_n' = \int_{-1}^{+1}\{\nu\phi_{0,xx} - (1-\nu)\,2ET_0x\}\cdot f_n\,dx$ である。

以下に結果の一部を示す。



図―2　(A)(i)の場合の応力分布



図―3　(A)の場合の主要点応力と高さとの関係

参　考　文　献

1)　森　忠次；第9回応用力学連合講演会にて講演

2)　G.Horvay；Jourral of Applied Mechanics.vol20(1953), p.87.