

## 脆性破壊挙動を考慮したトポロジー最適設計手法の開発

名古屋大学 学生会員 ○水鳥 智幸  
 名古屋大学 正会員 干場 大也  
 名古屋大学 正会員 加藤 準治

### 1. はじめに

近年、コンクリート（セメント系材料）の積層造形技術が発展している。従来に比べて安価に複雑な形状の造形技術が実現することで、自由な形状表現が可能なたポロジー最適化シミュレーションの活用が期待されている。しかし、コンクリート材料は急激なひずみ軟化を呈する脆性材料であり、かつ引張応力状態と圧縮応力状態で力学挙動が大きく異なる。感度解析に基づく一般のトポロジー最適化の枠組みにおいて、上記のような非線形材料を取り扱うことは容易ではない。本研究では弾塑性材料に関する先行研究で提案されている特殊な感度解析アルゴリズムを脆性損傷解析に応用し、実装が容易かつ計算負荷の少ないトポロジー最適化手法を新たに構築した。

### 2. 設計変数および最適化問題の設定

有限要素メッシュで離散化された  $i$  番目の要素について、設計変数を  $s_i = r_i/r_0$  ( $0 \leq s_i \leq 1$ ) と置く。ここで  $r_0$  はある有限要素高さ、 $r_i$  は要素内の一方の材料高さである。目的関数を  $f(\mathbf{s})$ 、等式制約関数を  $h(\mathbf{s})$  として、体積制約のもとで変位制御点に対する外部仕事量を最大化する最適化問題を次のように設定する。

$$\text{minimize } f(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\tilde{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} d\Omega \quad (1)$$

$$\text{subject to } h(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} s_j d\Omega - \hat{V} = 0 \quad (2)$$

ここで  $\boldsymbol{\sigma}$  はコーシー応力テンソル、 $\boldsymbol{\epsilon}$  は線形ひずみテンソルであり、 $\hat{V}$  は使用材料体積の制約値である。

### 3. コンクリート材料の等方脆性損傷モデル

本研究では、Mazars[1] の提案したコンクリート材料のための等方脆性損傷モデルを用いる。本材料モデルの特徴は、2つのスカラー損傷変数  $D_t, D_c$  によって引張応力状態と圧縮応力状態で異なる損傷進展を再現できる点にある。それぞれの損傷変数の進展則は実験

から得られる材料定数およびひずみの関数として与えられる。

全体の損傷の程度を表すスカラー損傷変数  $D$  を用いて、応力-ひずみ関係を次式で表す。

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3)$$

ここで、損傷変数  $D$  およびその発展則は次式で与えられる。

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (4)$$

$$D_t = 1 - \frac{(1 - A_t)K_0}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_t}{\exp(B_t(\tilde{\epsilon} - K_0))} \quad (5)$$

$$D_c = 1 - \frac{(1 - A_c)K_0}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_c}{\exp(B_c(\tilde{\epsilon} - K_0))} \quad (6)$$

ここで  $\alpha_t, \alpha_c$  は引張成分と圧縮成分の応力の比を表す係数、 $\tilde{\epsilon}$  は損傷の発達を規定する等価ひずみである。また、 $K_0, A_t, B_t, A_c, B_c$  は材料試験により求められるパラメータである。

有限要素解析により上記材料モデルの挙動を確認する。解析に用いた有限要素モデルを図-1に、使用した材料パラメータを表-1に示す。なお、これらはSaouridis[3]のデータセットをもとに設定した値である。

上記モデルの応力-ひずみ関係を図-2に、損傷変数の遷移を図-3に示す。以上より、本モデルによりコンクリート材料の脆性挙動を再現できていることが確認できる。

### 4. 感度解析アルゴリズムの定式化

本研究では最適化規準法による最適化アルゴリズムを用いるため、設計関数の感度を求める必要がある。制約関数の  $\partial h / \partial s_j$  は式(2)より自明であるため、ここで主題となるのは目的関数の感度  $\partial f / \partial s_j$  となる。

先行研究[2]に倣い、荷重が変位制御点にのみ作用する場合に限定することで、陰的な微分項であるひずみ感度  $\partial \boldsymbol{\epsilon} / \partial s_j$  を消去する。その結果、以下のように応

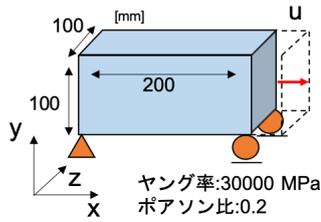


図-1 有限要素モデル

表-1 材料パラメータ

$K_0$	$A_t$	$B_t$	$A_c$	$B_c$
$10^{-4}$	0.95	2537	0.95	10450

力感度  $\partial\sigma/\partial s_j$  さえ求めれば全体の感度が求まる式に帰着する。

$$\frac{\partial f}{\partial s_j} = - \int_{\Omega} \int_{\varepsilon} \frac{\partial \sigma}{\partial s_j} : d\varepsilon d\Omega \quad (7)$$

また、上記の仮定により、 $\partial\sigma/\partial s_j$  の導出においてひずみの変化  $d\varepsilon$  は固定できるので、有限要素解析における節点変位の変化を考慮することなく、材料構成則のみを参照して微分すれば良い。

導出の結果、応力感度の計算式は以下の式となる。

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial s_j} = \left( \frac{\partial \mathbf{D}^{*-1}}{\partial \sigma^*} \sigma^* + \mathbf{D}^{*-1} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial s_j} \sigma^* \quad (8)$$

ここで、 $\sigma^*$  は主応力を変数にもつベクトルであり、 $\mathbf{D}^*$  は主ひずみ-主応力関係を与える剛性行列である。式 (9) が含む微分項について、損傷変数  $D$  の発展則がひずみの関数として与えられていることにより、 $\partial \mathbf{D}^{*-1} / \partial \sigma^* = 0$  となる。また、 $\partial \mathbf{D}^{*-1} / \partial s_j$  は  $\partial E / \partial s_j$  のように各材料定数の感度について展開することができ、それらは式 (3) の定義より設計変数の関数となる。また、式 (9) によって得られた主応力感度は以下の式により全応力感度に修正できる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s_j} = \frac{\partial \sigma_i^*}{\partial s_j} e_i \otimes e_i \quad (9)$$

これらの導出において、(1) 荷重条件を限定すること、(2) 等方損傷 (スカラー損傷変数) を仮定していること、(3) 損傷変数の発展則が応力に依存しない形式で与えられていることにより、極めて簡素な定式化・計算を実現していることに着目されたい。

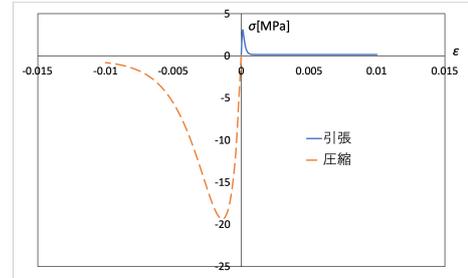


図-2 応力-ひずみ曲線

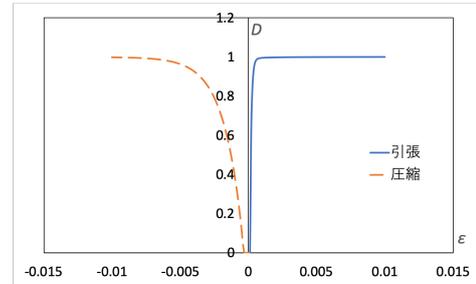


図-3 損傷変数の遷移

### 5. 結論

本研究において、コンクリートのための等方脆性損傷モデルに基づいて感度解析を定式化し、脆性破壊挙動を考慮したトポロジー最適化手法の枠組みを提案した。以上の定式化は、一般的な非線形トポロジー最適化に比べてプログラム実装・計算コストの負担を大きく軽減し、実用性を向上させるものである。今後において、実装した感度の精度および最適化の収束性能に関する検証、実際のコンクリート構造を想定した最適化計算例を逐次実行する予定である。

### 参考文献

[1] J. Mazars and G. Pijaudier-Cabot, Continuum damage Theory-Application to concrete, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, 1989, pp.345-365.  
 [2] J. Kato, H. Hoshiba, S. Takase, K. Terada, T. Kyoya, Analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites, Structural and Multidisciplinary Optimization, 52. pp. 507-526, 2015.  
 [3] C. Saouridis. Identification et numerisation objectives des comportements adoucissants: Une approche multiechlle de l'endommagement du beton. PhD thesis, Universite Paris VI, 1988.