

## 同時複数リンク切断を考慮したラプラシアン行列を用いた交通ネットワークの連結性評価

金沢大学 学生会員 ○田嶋 眞樹

金沢大学 正会員 中山 晶一朗

金沢大学 正会員 山口 裕通

金沢大学大学院 学生会員 中南 孝晶

### 1. 研究の背景・目的

道路ネットワークは人、物資などの輸送に関して日常的に非常に大きな役割を担っていると言える。一方で、日本においては地震災害や台風、豪雨、水害などの災害時には、一部の道路途絶などによるネットワークへの深刻な悪影響が発生し、人・物資などの輸送が滞ってしまう可能性が高い。そのため、各都道府県は災害時に、支援物資や支援者を輸送できるように、緊急輸送道路を指定し当該道路を災害時にも通行できるように整備することを通じて、災害時における円滑な物流を行うための交通ネットワークの構築を目指している。しかし、それらの自然災害は時に広範囲に渡る被害をもたらす、同時多発的な道路途絶の危険性が生じる。そのため、他地域からの支援物資や支援者などを被害地域全体に行き渡らせるためにも全体としての繋がりが強いネットワークが必要であり、また交通ネットワーク全体における同時多発的な被害を考慮した連結性の評価が必要である。

道路ネットワークの連結性の計算は様々な方法で行われている。その中でラプラシアン行列を用いた評価として小林ら<sup>1)</sup>の研究がある。それは1つのリンクがネットワーク全体に及ぼす影響評価であって、複数リンクの同時切断を考慮した評価は少ない。それは、複数リンクを考慮すると計算回数の増加という課題があるためである。本研究では、複数リンクの同時切断を考えた道路ネットワークの連結性評価の方法を提案することを目的とする。具体的には、仮想ネットワーク上で同時に複数のリンクを切断したネットワークシミュレーションを通じて以下の2点：(1) 複数リンクの同時切断は1リンクの切断と比較してネットワークに与える影響はどう異なるか。(2) 複数リンクの同時切断が起こるような災害に対しても強いネットワークとはどのような形か、を明らかにする。そして計算効率の課題を回避しつつ、これらの疑問に答えるために、小規模なネットワークから徐々に計算上の工夫を模索しながら大規模なネットワークへ展開していく。

### 2. ネットワークのグラフ化とラプラシアン行列

初めに、ネットワークのグラフ化について説明する。道路ネットワークにおけるノード同士の接続関係を隣接行列で記述する。ノード総数を $n$ とすると、隣接行列 $\mathbf{A}$ は $n \times n$ の正方行列で、成分 $a_{ij}$ は、ノード $i$ とノード $j$ がリンクで接続していると1、非接続だと0となる。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j \text{が接続}) \\ 0 & (i, j \text{が非接続}) \end{cases} \quad (2.1)$$

各ノードから出ているリンクの数は次数と呼ばれ、その次数を対角成分とした行列を次数行列 $\mathbf{D}$ とする。

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (2.2)$$

この隣接行列 $\mathbf{A}$ と次数行列 $\mathbf{D}$ を用いると、ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ は $\mathbf{D} - \mathbf{A}$ である。

この行列 $\mathbf{L}$ の2次形式は

$$x^T L x = \sum_i \sum_j a_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \quad (2.3)$$

で表さるため、半正定値である。半正定値対称行列の固有値は必ず非負であり最小固有値は常に0となる。さらに、第2最小固有値は代数的連結度、それに対応する固有ベクトルはフィードラーベクトルと呼ばれ、ネッ

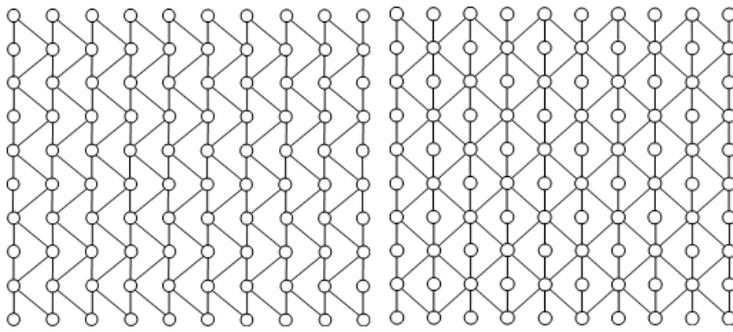


図1 三角形(正)

図2 三角形(逆)

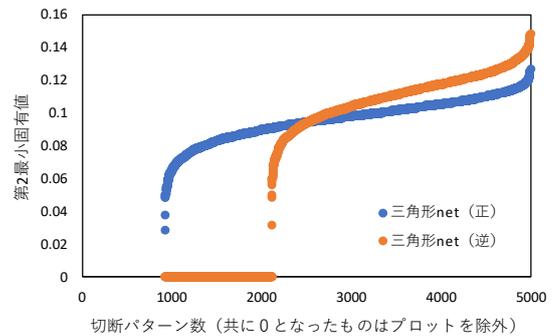


図3 第2最小固有値比較

トワーク連結性を表す指標の一つである。代数的連結度はネットワークが分断されやすい構造だと値が小さくなる。またネットワークが分断されているとき、第2最小固有値は0となる。

### 3. 仮想ネットワークでの計算

図1, 2に示すような二等辺三角形を多数連ねたネットワークで計算を行う。なお, 図1を三角形(正), 図2を三角形(逆)と呼ぶこととする。これらのネットワークにおいてノード間を繋ぐリンク長は, 縦が1, 斜辺が1.41, リンク数が198, ノード数が100と計算の条件を同じにしている。このネットワークにおいて図形上の端のノードの連結性の低さを処理するために上のノード行と下のノード行, また, 左のノード列と右のノード列を繋ぐことで端のノードが存在しないような円環面のネットワークを作る。

図3のグラフは両ネットワークにおいて全198リンク中の40リンク(約20%)がランダムに切断された(途絶した)際の固有値計算を5000回行い, 計算された第2最小固有値を昇順に並べ, 比較したものである。なお, 三角形(正), (逆)共に第2最小固有値が0となったパターンの(1回目~929回目)は除外してある。

まず, どのリンクも切断しなかった場合, つまり平常時の第2最小固有値は三角形(正)では0.19, 三角形(逆)では0.21となる。つまり, ネットワークの同時切断を考えずに第2最小固有値でネットワークの連結性評価をした場合, 三角形(逆)の方が強いネットワークであると言える。しかし, 40リンクが同時に切断された場合, 第2最小固有値が0より大きいパターン数が三角形(正) > 三角形(逆)である。つまり, 同時切断を考えると, 三角形(正)の方がネットワークの分断する可能性が低い。また, 第2最小固有値の値を見てみると, パターン2525回目付近までは三角形(正)  $\geq$  三角形(逆)であるが, それ以降では三角形(逆)  $\geq$  三角形(正)となることがわかる。つまり, 三角形(逆)の方が, 第2最小固有値の最大値が大きいが, 同時切断が起こると極端に脆弱・あるいは切断された形になる可能性が高い一方で, 三角形(正)の方では, 最大値は小さいが, 比較的同時に同時切断に対するパフォーマンスの低下が小さく, 同時切断に対して強いことがわかる。

### 4. まとめと展望

複数リンクの同時切断を考慮すると, 単純に代数的連結度で評価したネットワークの連結性と異なる結果が得られることが分かった。今後は設定を変えたより多くのネットワークでも同様の比較・検討, またネットワークがどのように分割されたかなどの検討をしていきたい。

謝辞: 本研究の一部は国土交通省新道路技術会議において採択され, 国土交通省国土技術政策総合研究所の委託研究により実施したものである。ここに記して感謝いたします。

#### 参考文献

- 1) 小林ら: 道路ネットワークのラプラシアン行列による脆弱性解析, 土木計画学研究・講演集, Vol.55, CD-ROM, 2017.
- 2) 仁平政一・西尾義典: グラフ理論序説改訂版, プレアデス出版, 安曇野, 2001.