変形拘束条件を付加した混合型剛塑性有限要素法について

金沢大学大学院　学生会員　○山栗 祐樹
金沢大学　山崎 健太郎
金沢大学　正会員　小林 俊一
金沢大学　正会員　松本 樹典

1. はじめに

最近著者らは，下界法を 2 次錐計画問題として定式化する 3 次元の混合型剛塑性有限要素法について検討している [1]．今回，補強土の安定問題を混合型剛塑性有限要素法で解くために，2 つの変形拘束条件を提案する．一方，上界法に基づく剛塑性有限要素法では，Asaoka et al .[2)3)] が補強材の効果を変位速度場に関する線形制約条件を課すことで表現する方法を示している．本報告で提案する変形拘束条件は，Asaoka et al .[2)3)] の線形制約条件と本質的に同様である．本報告では，混合型剛塑性有限要素法について変形拘束条件を付加する方法について，浅い基礎の支持力解析の解析結果を例に説明する．

2. 変形拘束条件の記述と定式化

アンカー材やジオテキスタイルのような補強材に接する土要素の長さ，角度は，補強材の拘束によって不変と考える．そこで，**2. (1)** では 2 点間が伸び縮みしない条件，**2. (2)** では 3 点間が直線上に位置する条件を導出する．また，**2. (3)** では下界法に基づく剛塑性境界値問題の定式化を示す．

(1) 2 点間が伸び縮みしない条件

図 1(左) に 2 点間が伸び縮みしない条件の概念図を示す．ある 2 点間 AB が伸び縮みしないためには，変形前の 2 点間の距離 $\overline{AB}$ と変形後の 2 点間の距離 $\overline{A'B'}$ が不変であれば良い．

$$\overline{AB}^2 = |\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A|^2 \tag{1}$$
$$\overline{A'B'}^2 = |(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A) + (\dot{\boldsymbol{u}}_B - \dot{\boldsymbol{u}}_A)dt|^2 \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{X}_A, \boldsymbol{X}_B$ は点 A, B の位置ベクトル，$\dot{\boldsymbol{u}}_A, \dot{\boldsymbol{u}}_B$ は点 A, B の節点変位速度，dt は微小時間である．$\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2$ かつ，dt^2 に関する項を無視すれば，2 点間が伸び縮みしない条件は以下の斉次線形制約条件として記述できる．

$$(\boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A)\cdot(\dot{\boldsymbol{u}}_B - \dot{\boldsymbol{u}}_A) = 0 \tag{3}$$

(2) 3 点間が直線上に位置する条件

図 1(右) に 3 点間が直線上に位置する条件の概念図を示す．変形後の 3 点間 $A'B'C'$ が直線上に位置するためには，ベクトル $\overrightarrow{A'B'}$ とベクトル $\overrightarrow{A'C'}$ が平行であれば良い．ここで，それぞれの点における位置ベクトルと節点変位速度場の成分を表示しておく．

$$\boldsymbol{X}_A = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_B = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_C = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} \tag{4}$$
$$\dot{\boldsymbol{u}}_A = \begin{Bmatrix} \dot{u}_A \\ \dot{v}_A \end{Bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_B = \begin{Bmatrix} \dot{u}_B \\ \dot{v}_B \end{Bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_C = \begin{Bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \end{Bmatrix} \tag{5}$$

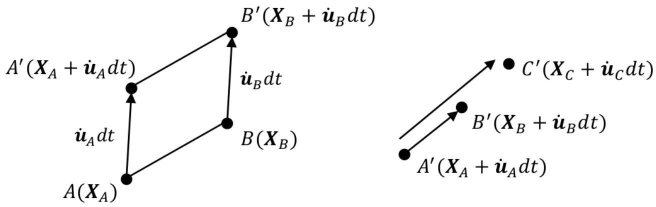

図 1　変形拘束条件の概念図 (左 : 2 点間が伸び縮みしない条件，右 : 3 点間が直線上に位置する条件)

ベクトル $\overrightarrow{A'B'}$ と $\overrightarrow{A'C'}$ が平行であることから $\overrightarrow{A'C'} = \beta\overrightarrow{A'B'}$，$\beta$ は定数が成り立ち，以下の式が導出される．

$$\begin{aligned}&\{(x_B - x_A) + (\dot{u}_B - \dot{u}_A)dt\}\{(y_C - y_A) + (\dot{v}_C - \dot{v}_A)dt\}\\ &= \{(x_C - x_A + (\dot{u}_C - \dot{u}_A)dt\}\{(y_B - y_A) + (\dot{v}_B - \dot{v}_A)dt\}\end{aligned} \tag{6}$$

上式を展開して dt^2 に関する項を無視すれば，3 点間が直線上に位置する条件は以下の斉次線形制約条件として記述できる．

$$\begin{aligned}&(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\\ &+ dt\,[y_B - y_C \quad y_C - y_A \quad y_A - y_B]\,\{\dot{u}_A \quad \dot{u}_B \quad \dot{u}_C\}^T\\ &+ dt\,[x_C - x_B \quad x_A - x_C \quad x_B - x_A]\,\{\dot{v}_A \quad \dot{v}_B \quad \dot{v}_C\}^T\\ &\simeq 0\end{aligned} \tag{7}$$

なお，変形前に直線上にいない 3 点が変形後に直線上に位置する制約条件の場合は，式 (7) の第 1 項目より非斉次制約条件となることが分かる．

(3) 定式化

剛塑性境界値問題を極限定理に基づく下界法によって定式化する．下界法は最終的に以下の非線形最適化問題として定式化できる．

$$\begin{aligned}&\text{Find} \max_{\boldsymbol{\sigma},\alpha,\boldsymbol{p}} \alpha\\ &\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma} = \alpha\boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_c + \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \le \boldsymbol{0} \end{cases}\end{aligned} \tag{8}$$

ここに α は荷重係数，$\boldsymbol{B}$ は係数行列，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力場，$\boldsymbol{\Gamma}_0$ は基準荷重，$\boldsymbol{\Gamma}_c$ は一定荷重，$\boldsymbol{D}$ は変形拘束条件に関する行列，$\boldsymbol{p}$ は拘束力，$\boldsymbol{f}$ は降伏関数である．式 (8) の等式制約条件は力の釣合い式，不等式制約条件は降伏条件である．本研究では，式 (8) を 2 次錐計画問題へと書き換え，内点法搭載の汎用最適化ソルバーを使用して解いた [1]．本定式化においては，変位速度場に関する制約条件は行列 $\boldsymbol{D}$ に記述されており，問題の双対性を考慮して，変形拘束に必要な荷重 $\boldsymbol{p}$ を未知数として解く定式化になっている．したがって，最適解においては，変位速度場に関する制約条件（斉次

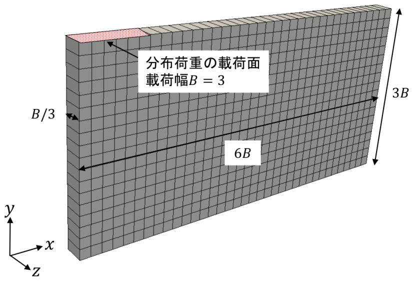

図 2　有限要素メッシュ

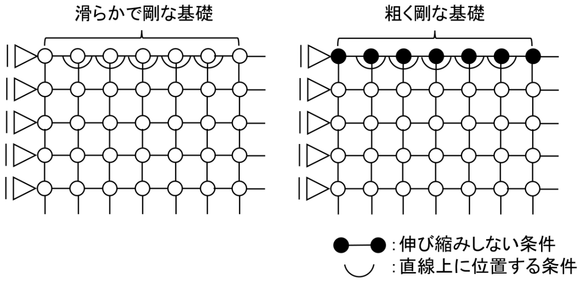

図 3　基礎のモデル化 (左：滑らかで剛な基礎，右：粗く剛な基礎基礎)

表 1　計算に用いたパラメータ

内部摩擦角 ϕ[°]	0
粘着力 c [kN/m^2]	1
安定化パラメータ ε[1)]	0.01

表 2　得られた極限支持力

	極限支持力 q_c [kN/m^2]
理論解	5.142
滑らかな基礎	5.238
滑らかで剛な基礎	5.522
粗く剛な基礎	5.789

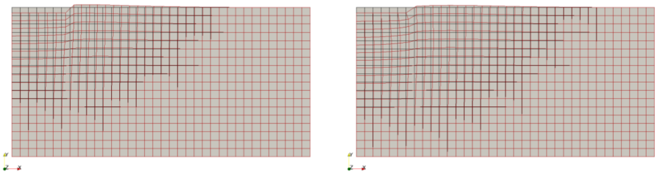
図 4　崩壊メカニズム (左：滑らかで剛な基礎，右：粗く剛な基礎)

ディリクレ境界条件や上述の斉次線形制約条件）を満足することが保証される[4)]．なお，変位場の空間離散化は六面体一次要素，応力場の空間離散化は $2\times2\times2$ のガウス積分点で行った．

使用する降伏関数は von-Mises モデルであり，数値的不安定を回避するために偏差応力テンソルの第 2 不変量 J_2 に対して安定化項を付加した[1)]．

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2'} - k \qquad (9)$$

ここに，J_2' は安定化項を付加した偏差応力テンソルの第 2 不変量，k は材料強度である．

3.　浅い基礎の支持力解析

(1)　解析条件

解析には図 2 に示すような 3 次元の有限要素メッシュ (要素数：648) を用いた．境界条件としてメッシュの底面 (xz 面) に固定支点を，xy 面，yz 面にはその面の鉛直方向にスライダー支点を与えて奥行きを拘束し，疑似的な平面ひずみ条件を与えた．簡単のため，地盤は均質一様な粘性土（$\phi=0°$）とする．計算に用いたパラメータを表 1 に示す．

本報告では，滑らかな基礎と滑らかで剛な基礎，粗く剛な基礎の 3 種類の基礎を検討する．基礎のモデル化は図 3 に示すように変形拘束条件を与えた．また，基礎の両端の鉛直変位が等しくなるように変形拘束条件を与えた．なお，滑らかな基礎の場合，何も変形拘束条件を与えない．

(2)　解析結果

得られた極限支持力を表 2 に示す．滑らかな基礎の場合と比較すると，滑らかで剛な基礎の場合，約 5.4%，粗く剛な基礎の場合，約 10.5% 大きな極限支持力が得られている．このことから，変形拘束条件によって土が拘束される分，極限支持力が増加することが分かる．しかし，基礎の端部において特異点処理等を行っていないため，過大に極限支持力を評価している可能性がある．

得られた崩壊メカニズムの例を図 4 に示す．図より滑らかで剛な基礎，粗く剛な基礎ともに同様な崩壊メカニズムが得られている．また，基礎下の速度場に着目すると，滑らかで剛な基礎の場合，鉛直方向だけではなく水平方向にも速度場が生じ，粗く剛な基礎の場合，鉛直方向のみ速度場が生じる．このことから適切な基礎のモデル化ができたことが分かる．

4.　おわりに

本報告では，補強土の安定問題を混合型剛塑性有限要素法によって解くために，2 つの変形拘束条件を示した．さらに数値解析例として，浅い基礎の支持力解析を実施した．変形拘束条件を付加することで，得られる極限支持力は増加すること．適切な基礎のモデル化ができたことを確認した．

本報告で示した変形拘束条件は，補強材など変形を拘束する材料の強度が十分に大きいことを前提にしている．しかしながら実際の補強材の強度には上限がある．補強材自身の強度も考慮するためには，式 (8) 中の拘束力 $\boldsymbol{p}$ に関して，強度を考慮した不等式制約条件を課せば良いと思われる．今後は，補強材の拘束力の限界を考慮した定式化を行うとともに，例えばジオテキスタイルによって補強した地盤の支持力解析を行う．また，本手法は数値解析上の検討にとどまっているため，模型実験等との比較を行っていきたい．

参考文献

1) 山栗ら：第 53 回地盤工学研究発表会, 1251-1252, 2018.
2) Asaoka, A. , et al.：*SF*, 34 (1), pp.107-118, 1994.
3) Kodaka, T. , et al.：*SF*, 35 (1), pp.133-145, 1995.
4) 小林俊一：応用力学論文集, 土木学会, Vol.6,pp.95-106, 2003.