

# 転波列性サージ流れにおける水深と流速の関係に関する一検討

名城大学 正会員 新井宗之

## 1. はじめに

開水路における浅水流において、その流速と水深の関係は清水流をはじめとして固体粒子を含む多くの流体について明らかにされている。通常、その流れにおける流速と水深の関係は、定常で等流の流れにおいて加速度項と移流項が0となり、流体に作用する外力と流れの底面に作用する抵抗力が平衡状態になるため、流れの機構をモデル化することにより流速と水深の関係を一意的に定義するものである。このため、この関係は抵抗則とも呼ばれる。

しかしながら、実際の適応においては、抵抗則の前提となる定常等流の条件とは異なる場合にも広く用いられる。土石流のような水深が大きく変動するような場合においても実務的な必要性から定常等流での抵抗則が用いられる。これは、定常等流でない場合の流動機構を検討することが極めて困難であることに基づいている。

間欠的な土石流サージのように大きな水深変動を有する流れにおいて、著者らはこのようなサージ流れが非線形波動現象の一種であることを示している<sup>1),2),3)</sup>。本研究では、この水面変動に関する非線形波動方程式を導出する過程において、平均水深  $h_0$  からの変動量  $\eta$  と平均流速  $u_0$  からの流速の変動量  $u_1$  の関係を求めることが可能であり、このような転波列性の水深の変動における水深と流速の関係を明らかにすることを目的とするものである。

## 2. 流速と水深の関係の導出

ここでは、流れの不安定性による転波列性サージのような間欠的な水深変動を伴う流れを対象にする。このような現象の水深と流速の理論的な関係はほとんど検討されていないといえる。著者らはこのような流れの水面変動が、前節で触れたように、非線形波動現象の一種であることを示しているが、その波動方程式の導出過程で、ここで対象としている水深と流速の関係を導出することが可能である。このため、波動方程式の導出に準じて述べることにする。

流体を非圧縮、非回転とし、速度ポテンシャル  $\phi$  を用いると流体の非圧縮・非回転の関係から次式のラプラス方程式の関係を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

カーテシアン座標系で、 $x$  は流下方向、 $y$  は水深方向であり、座標系は図1のようである。水路底部での  $y$  方向の速度成分  $v$  の条件は、平均水深  $h_0$  を基準とすると  $y = -h_0$  で

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = -h_0) \tag{2}$$

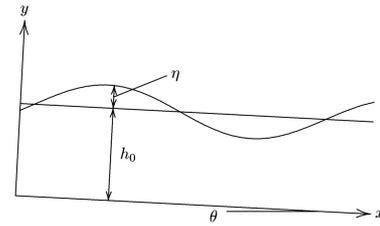


図1 座標系

である。また、水面の変形と流体粒子の運動が一致する条件として、次式の関係がある。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (y = \eta) \tag{3}$$

$\eta$  は平均水深  $h_0$  からの変動分、 $t$  は時間である。水面の変動条件については、湛水域での水面変動にベルヌーイの定理が用いられる。しかし、ここでは浅水流運動方程式から導いた次式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(2\beta - 1) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g \sin \theta x + g \cos \theta h \\ + \frac{f'}{2} \frac{u_0}{h_0} \phi + (\beta - 1) \frac{u_0}{h_0} \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここに、 $\beta$ : 運動量補正係数、 $g$ : 重力加速度、 $\theta$ : 水路勾配、 $h = h_0 + \eta$ : 水深、 $f'$ : 摩擦損失係数、 $u_0$ : 平均流速、 $h_0$ : 平均水深。式(4)の左辺第1項はポテンシャルの時間変動項、第2項は運動エネルギー、第3項は位置エネルギー、第4項は比エネルギー、第5項は底面摩擦による損失項、第6項は水深方向の流速分布が一様でない場合の水面変動による付加エネルギー項である。

式(4)は、次式の浅水流運動方程式を基にしている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{u}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2} \frac{u^2}{R} \tag{5}$$

ここに、 $u$ :  $x$  方向の流速成分、 $\beta$ : 運動量補正係数、 $A$ : 流水断面積、 $f'$ : 摩擦損失係数、 $R$ : 径深。左辺の第1項は加速度項、第2項は移流項、第3項は流速分布が一様でない場合の水深の急激な変動による付加応力、右辺第1項は重力項、第2項は水面勾配による作用力、第3項は底面摩擦による抵抗項である。抵抗項において平均水深  $h_0$ 、平均流速  $u_0$  からの変動成分をそれぞれ、 $h'$ 、 $u'$  とすると、 $h'$ 、 $u'$  は微小とし、微小項の2乗を無視する。また、それぞれの微小項と平均値との比の差は相対的に無視出来るものとし ( $h'/h_0 - u'/u_0 \ll 1$ )、摩擦損失係数  $f'/2$  は定数とすると抵抗項は

$$\frac{f'}{2} \frac{u^2}{R} \approx \frac{f'}{2} \frac{u_0}{h_0} u \tag{6}$$

と表すことができる。これより、 $u = \partial \phi / \partial x$  を用いると式(5)より式(4)を得る。

無次元パラメータとして,

$$\phi' = \phi/(h_0 v_{p0}, \quad x' = x/h_0, \quad y' = y/h_0, \quad t' = tv_{p0}/h, \quad \eta' = \eta/h_0 \quad (7)$$

とする。\$v\_{p0}\$ は後述する Gurdner-Morikawa(GM) 変換における \$x\$ 軸方向の位相速度に相当するパラメータである。

これらを用いて基礎方程式を無次元表示すると次式のようである。

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0, \quad (y' = -1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} = \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{1}{2}(2\beta - 1) \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 - c_0'^2 \tan \theta x' \\ + c_0'^2(1 + \eta') + \frac{f'}{2} u_0' c_0' \phi' \\ + (\beta - 1) u_0' c_0' \int \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} dx' = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

ここに,

$$u_0' = \frac{u_0}{c_0}, \quad c_0' = \frac{c_0}{v_{p0}}, \quad c = \sqrt{gh_0 \cos \theta} \quad (12)$$

である。さらに, G-M 変換

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}} (x - v_{p0}t), \quad \tau = \epsilon^{\frac{3}{2}} t \quad (13)$$

その無次元表示, \$\xi' = \xi/h\_0\$, \$\tau' = \tau v\_{p0}/h\_0\$ より,

$$\xi' = \epsilon^{\frac{1}{2}} (x' - t'), \quad \tau' = \epsilon^{\frac{3}{2}} t' \quad (14)$$

を用い, \$\eta'\$, \$\phi'\$ の摂動展開

$$\eta' = \epsilon \eta^{(1)}(\xi', \tau') + \epsilon^2 \eta^{(2)}(\xi', \tau') + \dots, \quad (15)$$

$$\phi' = \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi^{(1)}(\xi', y', \tau') + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi^{(2)}(\xi', y', \tau') + \dots, \quad (16)$$

および \$y' = 0\$ の近傍における Boussinesq の \$\phi'\$ の Taylor 展開

$$\begin{aligned} \phi'(\xi', y', \tau') = \phi'(\xi', 0, \tau') + \eta' \frac{\partial \phi'(\xi', 0, \tau')}{\partial y'} \\ + \frac{\eta'^2}{2} \frac{\partial^2 \phi'(\xi', 0, \tau')}{\partial y'^2} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

を用いる。これらを無次元基礎方程式に適用して, \$\epsilon\$ の \$\epsilon^{\frac{1}{2}}\$ と \$\epsilon^1\$ の次数の斉次方程式を求めると,

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y'^2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y'} = 0, \quad (y' = -1), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y'} = 0, \quad (y' = 0), \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \eta^{(1)} + \frac{f'}{2} u_0' c_0' \phi^{(1)} = 0, \quad (21)$$

である。この内の式 (21) は \$\phi^{(1)}\$ と \$\eta^{(1)}\$ の関係を示している。式 (21) は項を移項すると,

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi'} - \frac{f'}{2} u_0' c_0' \phi^{(1)} = c_0'^2 \eta^{(1)} \quad (22)$$

であり, \$\phi'\$ に関する \$\xi'\$ の 1 階微分方程式と考えると, 上式の \$\phi^{(1)}\$ を \$\xi'\$ について解けば

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} = e^{-h} \left[ \int e^h c_0'^2 \eta^{(1)} d\xi' + C \right] \\ \text{ここに, } h = \int \left( -\frac{f'}{2} u_0' c_0' \right) d\xi' = -\frac{f'}{2} u_0' c_0' \xi', \end{aligned}$$

ただし, \$C\$ は積分定数,

である。ここで対象とするような流れにおいて摩擦損失係数 \$f'\$ は \$f' \ll 1\$ である。\$u\_0'\$ は, 後述するように G-M 変換の速度パラメータ \$v\_{p0}\$ が長波の波速の場合, Froude 数に相当し, ここでは \$10 > u\_0' \ge 1\$ 程度の流れを対象にする。\$c\_0'\$ も, 同様に \$v\_{p0}\$ が長波の波速あるいはその近傍で \$c\_0' \approx 1\$ 程度である。\$\xi'\$ は 1 波長の解で \$\xi = 0 \sim 1\$ である。このことより, \$(f'/2)u\_0'c\_0'\xi' \le 1\$ であり, \$e^{h'} \approx 1\$ と考えることができる。これより式 (22) の近似解は

$$\phi^{(1)} \approx \int c_0'^2 \eta^{(1)} d\xi' + C$$

である。上式の \$\xi'\$ の導関数を取ると近似式として次式を得る。

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi'} = c_0'^2 \eta^{(1)} \quad (23)$$

上式は式 (22) の近似式を表している。

### 3. 考察およびまとめ

式 (23) の左辺は \$\xi'\$ 方向の速度を表している。この速度を \$u\_1'\$ とすると \$u\_1' = \partial \phi^{(1)} / \partial \xi'\$ であり, 式 (23) は

$$u_1' = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi'} = c_0'^2 \eta^{(1)}$$

である。\$\eta'\$ は図 1 に示すように, 平均水深からの無次元変動成分である。また, \$u\_1' = \partial \phi^{(1)} / \partial \xi'\$ は平均流速 \$u\_0\$ からの無次元変動成分である。したがって, 無次元流速 \$u'\$ と水深の関係は, 1 次近似の関係として

$$u' = u_0' + c_0'^2 \eta^{(1)} \quad (24)$$

の関係がある。

### 参考文献

- 1) Arai M., Huebl J. and Kaitna R.: Occurrence conditions of roll waves for three grain-fluid models and comparison with results from experiments and field observation. *Geophysical Journal International*, Vol.195, Issue 3, pp.1464-1480 (doi:10.1093/gji/ggt352), 2013.
- 2) 新井宗之: 浅水流運動方程式を考慮した傾斜水路上の転波列の波動, 数理解析研究所講究録, No.1989, 京都大学数理解析研究所, pp.60-68, 2016.
- 3) Arai, M.: Wave equation and Some solutions on intermittent debris flow, *International Journal of Erosion Control Engineering*, Vol.10, No.1, pp.39-46, 2017.