

2 次錐計画に基づく剛塑性有限要素法の双対性に関する考察

金沢大学 学生会員 武村洸希 ○山栗祐樹

金沢大学 正会員 小林俊一 松本樹典

係するラグランジアン L_L を導入する.

1. はじめに

最近、著者らは下界法を 2 次錐計画問題として定式化する剛塑性有限要素法¹⁾について検討を行っている. 一方、従来から田村ら²⁾、大塚ら³⁾による上界法に基づく剛塑性有限要素法の定式化が広く知られている. この定式化では、応力をひずみ速度の関数で陽に表した剛塑性の構成式を導出し、それに基づいて内部消散率を評価する. 一方、この定式化の双対性や導出される双対問題についての議論は見当たらない.

本報では、下界法 2 次錐計画問題から双対性を利用して上界法を陽に解いて剛塑性有限要素法の定式化を行い、既往研究における定式化との関係について報告する.

2. 2 次錐計画を用いた下界法の定式化

(1) 降伏関数 (破壊条件) の 2 次錐表現

2 次錐計画問題とは、2 次錐制約を含んでいる最適化問題である. 代表的な降伏関数のほとんどは 2 次錐の形で表現することが可能である. 最終的に応力を変数とする以下の形で表現できる.

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma \cdot Q \sigma + a \cdot \sigma + b \quad (1)$$

ここに行列 Q は半正定値対称行列、ベクトル a 、スカラー b は定数である.

(2) 下界法の定式化

下界法では、つり合い条件を満足し、かつ領域内のあらゆるところで降伏条件を破らない応力場 (許容応力場) のうち、荷重係数 α が最大となる応力場を求める最適化問題として表現できる.

$$\begin{aligned} & \max \alpha \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i \in V_{\sigma E}} B_i^T \sigma_i = \alpha \Gamma_0 + \Gamma_c + D_d^T p \\ f_i(\sigma_i) \leq 0 \quad \forall i \in V \end{cases} \end{aligned} \quad (2) \quad (3)$$

ここに下添え字 i は適切に空間離散化した各要素を意味する.

3. 上界法 (双対問題) の導出

(1) ラグランジュ双対性の利用

ここでは既往研究⁴⁾を参考に、ラグランジュ双対性を利用した上界法の導出を行う. まず、下界法に関

$$L_L = \alpha + \mu \cdot \left(\sum_i B_i^T \sigma_i - \alpha \{ \Gamma_0 \} - \{ \Gamma_c \} - [D_d^T] \{ p \} \right) - \lambda \sum_i f_i(\sigma_i) \quad (4)$$

式 (4) に対し、変数 α, σ_i, p について上限操作を行ったのち、残りのラグランジュ乗数 μ, λ に関して下限操作を行うと以下の関係式が得られる.

$$\inf_{\lambda, \mu \geq 0} \left[\sup_{\sigma_i} \{ L_L \} \right] = \inf_{\lambda, \mu \geq 0} \left[\sup_{\sigma_i} \left\{ \mu \cdot \left(\sum_i B_i^T \sigma_i \right) - \sum_i \lambda_i f_i(\sigma_i) - \mu \cdot \Gamma_c \right\} \right] \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1 - \mu \{ \Gamma_0 \} = 0 \\ \mu [D_d^T] = 0 \end{cases} \quad (6)$$

一般に、上限 $\sup_{\sigma_i} L_L$ を μ, λ の関数として陽に書き表すのは難しい. これは降伏関数 (破壊条件) $f_i(\sigma_i)$ の非線形性や、そのヘッセ行列 $\nabla_{\sigma_i}^2 f_i$ が必ずしも正定値行列である保証がないためである. さて、降伏関数 (破壊条件) の微分可能性を認めれば、上限操作によって得られる内部消散率

$$w_i(\mu, \lambda_i) = \sup_{\sigma_i} \{ \sigma_i \cdot B_i \mu - \lambda_i f_i(\sigma_i) \} \quad (7)$$

が満たすべき 1 次の最適性条件が以下のように得られる.

$$B_i \mu - \lambda_i \nabla_{\sigma_i} f_i = 0 \quad (8)$$

ここで得られた式 (8) は、関連流れ則を表すと解釈できる. この一次の最適性条件を満たす σ_i を節点変位速度 μ の関数として陽に解ければ、要素 i 毎の内部消散率 $w_i(\mu, \lambda_i)$ が陽に表せる. ここで式 (1) を用い、 Q が正定値対称行列であると仮定すれば逆行列が存在し、応力 σ_i が変位速度 μ の関数として陽に解ける.

$$\hat{\sigma}_i = Q_i^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_i} B_i \mu - a_i \right) \quad (9)$$

また、式 (9) における $\hat{\sigma}_i$ は、上限 $\sup L_L$ が有界であるときの応力となる. 式 (9) を式 (1) に代入すれば、変位速度 μ の関数として以下の降伏関数を得る.

$$f_i(\hat{\sigma}_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i^2} \mu \cdot B_i^T Q_i^{-1} B_i \mu - \frac{1}{2} a_i \cdot Q_i^{-1} a_i + b_i \quad (10)$$

したがって、式 (5) の応力 σ_i に関する上限操作から、内部消散率 $w_i(\mu, \lambda_i)$ が変位速度の関数として陽に書

ける.

$$w_i(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \lambda_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{a}_i - \lambda_i b_i \quad (11)$$

以上から、双対問題は変位速度 $\boldsymbol{\mu}$ や塑性乗数 λ の関数として以下のように導出される.

$$\min_{\boldsymbol{\mu}, \lambda \geq 0} \sum_i w_i(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) - \boldsymbol{\mu} \Gamma_c \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1 - \boldsymbol{\mu} \Gamma_0 = 0 \\ \mathbf{D}_a \boldsymbol{\mu} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

さて、式 (11) から λ_i を消去し、内部消散率を節点変位速度 $\boldsymbol{\mu}$ の関数として表す. 簡略のため以下の関数を導入する.

$$n_i(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu}, \quad d_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{a}_i - b_i \quad (14)$$

式 (14) を使うことで、各要素における内部消散率 $w_i(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i)$ (式 (11)) は以下ようになる.

$$w_i(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i} n_i(\boldsymbol{\mu}) + \lambda_i d_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} \quad (15)$$

ここで、式 (15) の 1 次の最適性条件を考慮することで、ラグランジュ乗数 λ_i は以下のように表される.

$$\frac{\partial w_i}{\partial \lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_i^2} n_i(\boldsymbol{\mu}) + d_i = 0 \rightarrow \check{\lambda}_i = \sqrt{\frac{n_i}{d_i}} \quad (16)$$

式 (16) を式 (15) に代入することで節点変位速度 $\boldsymbol{\mu}$ を変数とする内部消散率 $\check{w}_i(\boldsymbol{\mu})$ が導出される.

$$\check{w}_i(\boldsymbol{\mu}) = 2\sqrt{d_i} \sqrt{n_i(\boldsymbol{\mu})} - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} \quad (17)$$

以上の議論を踏まえると、双対問題である上界法は、以下の最適化問題として定式化できる.

$$\inf_{\boldsymbol{\mu}} \left[\sum_i \check{w}_i(\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu} \cdot \Gamma_c \right] \quad (18)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1 - \boldsymbol{\mu} \Gamma_0 = 0 \\ \mathbf{D}_a \boldsymbol{\mu} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

(2) $\mathbf{Q}$ の正定値化について

偏差応力テンソルの第 2 不変量 J_2 を含む降伏関数, 例えば Von-Mises モデル等では、行列 $\mathbf{Q}$ が半正定値対称行列となる. したがって、ゼロ固有値を持ち、逆行列を持たない.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (20)$$

そこで、 $\mathbf{Q}$ に対して以下の安定化項を導入し、行列 $\mathbf{Q}$ の正定値化を行う.

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここに正の実数 ε は十分小さな安定化パラメータである.

4. ディスカッション

前章で導出した上界法の性質を調べる. 式 (19) に示す 2 つの制約条件について、1 つ目は基準荷重 Γ_0 による外部仕事率の正規化を、2 つ目は変位拘束条件 (ディリクレ条件) を意味する.

式 (18) の目的関数は基準荷重 Γ_0 に関する荷重係数を意味しており、荷重係数の最適解 α^* に関して不等式

$$\frac{\sum_i \check{w}_i - \boldsymbol{\mu} \cdot \Gamma_c}{\boldsymbol{\mu} \cdot \Gamma_0} \geq \alpha^* \quad (22)$$

が成り立つことを考慮すれば、塑性的に安定であるためには、内部消散率が外部仕事率を下回らないことを意味している. また、内部消散率 $\check{w}$ の最小化に関して、以下の節点変位速度 $\boldsymbol{\mu}$ についての 1 次の最適性を満足する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{w}_i(\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{n_i(\boldsymbol{\mu})}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} - \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{a}_i \\ &= \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \left(\frac{1}{\lambda_i} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}_i \right) = \mathbf{B}_i^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) に加え、式 (8), (9) から得られる節点変位速度 $\boldsymbol{\mu}$ は、関連流れ則を満足することが分かる.

本報告による定式化は、既往研究^{2,3)}における上界法の定式化と同様の構造を有する.

5. おわりに

本報告では、下界法に基づいて 2 次錐計画問題として剛塑性境界値問題の定式化を行い、そこからラグランジュ双対性を利用して上界法の導出を行った. 得られた上界法の定式化は、既往研究と同様の構造を有することを確認した. 今後は本手法の定式化に基づく具体的な数値解析法の検討を行う予定である.

参考文献

- 1) 山栗、小林ら：2 次錐計画問題に基づく剛塑性有限要素法について、第 52 回地盤工学研究発表会, CD-ROM, 2017
- 2) Tamura.T., Kobayashi,S., Sumi,T. et al : Rigid-Plactice Finite Element Method For Friction Materials, *Solis and Foundations*, Vol27, No.2, pp.1-12, 1987.
- 3) 大塚、宮田ら：剛塑性有限要素法による斜面安定解析, *Journal of the Japan Landslide Society*, Vol.38, No.3, pp235-143, 2001.
- 4) 小林俊一：主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.95-106, 2003.