傾斜水路上の浅水流転波列における流れの抵抗則を考慮した水面波動方程式

名城大学　　正会員　新井宗之

1. はじめに

山地河道における間欠的な土石流は，流れの不安定性に基づく転波列の一種であると考えられる[1)]．このような現象は，中国の粘性土石流と呼ばれる土石流流下現象が代表的なものであるが，近年，欧州のオーストリア，イタリア，スイス等の研究者によってヨーロッパアルプスでも，観測技術の向上により，多数観測されて来ている．通常の単発的な土石流流下現象であっても短時間に複数のサージが流下していることも珍しくない．

このような現象を検討するうえで，その水面の波動性を表す波動方程式を明らかにすることは大変重要である．一方，土石流の流動モデルには，ダイラタント流体モデルやビンガム流体モデルなどいくつもの流体モデルが提案されている．これは一見同じような土石流の流体であっても流れを構成している粒子径や流速などの条件によって支配的な流動機構が異なることを意味しているものでもあると言える．そこで本研究では，これらの流体モデルが転波列性サージの波動性にどのように影響するかを明らかにするため，流動機構の抵抗則を一般化する摩擦損失係数と運動量補正係数を含む波動方程式の導出を目的としている．

2. 基礎方程式

傾斜水路上に生成される急激な水深変化を有するサージ流下現象を検討するための水面変動方程式（波動方程式）を得ることを目的としている．座標系を**図-1** のように，流下方向を x，その垂直方向 (水深方向) を y とし，流体を一様流体で非圧縮 ($\mathrm{div}\vec{v}=0$)，非回転 ($\mathrm{rot}\vec{v}=0$) の関係より速度ポテンシャル ϕ を導入すると，次式のラプラス方程式の関係がある．

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0. \tag{1}$$

ここに，微分表示を添え字で表し $\partial^2\phi/\partial x^2=\phi_{xx}$ 等とする（以下同じ）．

水底 ($y=-h_0$) での境界条件は，水深方向 (y 方向) の速度成分を v とすると，

$$v=\phi_x=0,\quad (y=-h_0). \tag{2}$$

水面の変形と水面の水粒子の運動が一致する条件は，水深 h_0 からの水面の変動成分を $\eta(x,t)$ とすると，次式の関係がある．

$$\phi_y-\eta_t-\phi_x\eta_x=0,\quad (y=0). \tag{3}$$

浅水域の湛水状態での水面変動の波動方程式の導出では，

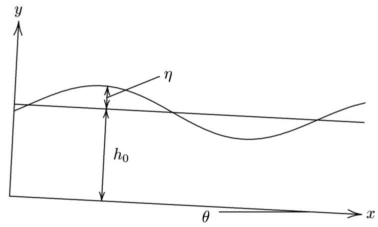

図-1 座標系

水面変動条件としてベルヌーイの式が用いられる．著者らは，この水面変動条件に浅水流の運動方程式を基にした式を用い，水面変動の波動方程式を得ている[2)]．しかし，流体モデルの違いは考慮していない．ここでは，流体モデルの特性を表す運動量補正係数 β と摩擦損失係数 f' を含めた水面変動条件として次式を用いる．

$$\begin{aligned}\phi_t+\frac{1}{2}(2\beta-1)(\phi_x)^2-g\sin\theta\,x+g\cos\theta\,h\\+\frac{f'}{2}\frac{u_0}{h_0}\phi+(\beta-1)\frac{u_0}{h_0}\int\phi_x\eta_x\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{4}$$

ここに，β : 運動量補正係数，g : 重力加速度，θ : 水路勾配，$h=h_0+\eta$: 水深，f' : 摩擦損失係数，u_0 : 平均流速，h_0 : 平均水深．式 (4) の左辺第１項はポテンシャルの時間変動項，第２項は運動エネルギー，第３項は位置エネルギー，第４項は比エネルギー，第５項は底面摩擦による損失項，第６項は水深方向の流速分布が一様でない場合の水面変動による付加エネルギー項である．

3. 無次元基礎方程式と摂動展開

代表長さを平均水深 h_0，代表流速を Gerdner-Morikawa(G-M) 変換

$$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}\left(x-v_{p0}t\right),\quad \tau=\epsilon^{\frac{3}{2}}t \tag{5}$$

における位相速度パラメータ v_{p0} とする．ϵ は摂動展開における微小パラメータである．これより無次元量を次のように定義し，無次元量にプライムを付す．

$$\begin{aligned}\phi'=\phi/(h_0v_{p0}),\ \ x'=x/h_0,\ \ y'=y/h_0,\\ t'=\left(v_{p0}/h_0\right)t,\ \ \eta'=\eta/h_0.\end{aligned} \tag{6}$$

これより，ξ，τ の無次元量 ξ'，τ' は次式のようである．

$$\xi'=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x'-t'),\quad \tau'=\epsilon^{\frac{3}{2}}t' \tag{7}$$

これらより式 (1)~ 式 (4) の基礎方程式の無次元表示は次式のようである．

$$\phi'_{x'x'}+\phi'_{y'y'}=0, \tag{8}$$

$$\phi'_{y'}=0,\ \ (y'=-1), \tag{9}$$

Keyword : 土砂流サージ，転波列，波動方程式，流体モデル
〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501 Tel: 052-838-2364

$$-\phi'_{y'} + \eta'_{t'} + \phi'_{x'}\eta'_{x'} = 0, \ (y' = 0), \tag{10}$$

$$\phi'_{t'} + \frac{1}{2}(2\beta - 1)\,(\phi'_{x'})^2 - c_0{'}^2 \tan\theta\, x' + c_0{'}^2(1+\eta') + \frac{f'}{2}u_0{'}c_0{'}\phi' + (\beta-1)u_0{'}c_0{'}\int \phi'_{x'}\eta'_{x'}\mathrm{d}x' = 0. \tag{11}$$

ここに，$u_0{'} = u_0/c_0$，$c_0{'} = c_0/v_{p0}$，$c_0 = \sqrt{gh_0\cos\theta}$.

平均水深 h_0 からの変動量 η および速度ポテンシャル ϕ の摂動展開は，無次元量を

$$\eta' = \eta/h_0,\ \eta'^{(1)} = \eta^{(1)}/h_0,\ \eta'^{(2)} = \eta^{(2)}/h_0, \cdots,$$
$$\phi' = \phi/(h_0 v_{p0}),\ \phi'^{(1)} = \phi^{(1)}/(h_0 v_{p0}),\ \cdots \tag{12}$$

と定義すると，η'，ϕ' の無次元摂動展開として

$$\eta' = \epsilon\eta'^{(1)}(\xi',\tau') + \epsilon^2\eta'^{(2)}(\xi',\tau') + \cdots, \tag{13}$$
$$\phi' = \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)}(\xi',y',\tau') + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)}(\xi',y',\tau') + \cdots \tag{14}$$

と表される．また，$y' = 0$ の近傍 η' における ϕ' の Boussinesq による Taylor 展開を用いる．これらより，無次元基礎方程式の摂動展開は次のように表せる．

式 (8) のラプラス方程式は

$$\begin{aligned}\phi'_{x'x'} + \phi'_{y'y'} &= \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(1)}_{\xi'\xi'} + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(2)}_{\xi'\xi'} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\phi'^{(3)}_{\xi'\xi'} + \cdots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)}_{y'y'} + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)}_{y'y'} + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(3)}_{y'y'} + \cdots \\ &= 0.\end{aligned} \tag{15}$$

式 (9) の水底条件は，

$$\begin{aligned}\phi'_{y'} &= \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)}_{y'} + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)}_{y'} + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(3)}_{y'} + \cdots \\ &= 0.\end{aligned} \tag{16}$$

式 (10) の水面条件は，

$$\begin{aligned}&-\phi'_{y'} + \eta'_{t'} + \phi'_{x'}\eta'_{x'} \\ &= -\phi'_{y'} - \epsilon^{\frac{1}{2}}\eta'_{\xi'} + \epsilon^{\frac{3}{2}}\eta'_{\tau'} + \epsilon\phi'_{\xi'}\eta'_{\xi'} \\ &= -\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)}_{y'} - \epsilon^{\frac{3}{2}}\eta'^{(1)}\phi'^{(1)}_{y'y'} - \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(2)}\phi'^{(1)}_{y'y'} - \cdots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)}_{y'} - \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(1)}\phi'^{(2)}_{y'y'} - \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(2)}\phi'^{(2)}_{y'y'} - \cdots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(3)}_{y'} - \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(1)}\phi'^{(3)}_{y'y'} - \epsilon^{\frac{9}{2}}\eta'^{(2)}\phi'^{(3)}_{y'y'} - \cdots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{3}{2}}\eta'^{(1)}_{\xi'} - \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(2)}_{\xi'} - \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(3)}_{\xi'} - \cdots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(1)}_{\tau'} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(2)}_{\tau'} + \epsilon^{\frac{9}{2}}\eta'^{(3)}_{\tau'} + \cdots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'} \\ &\quad + \epsilon^{\frac{9}{2}}\phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'} + \cdots = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

式 (11) の水面変動条件は，

$$\begin{aligned}&\phi'_{t'} + \frac{1}{2}(2\beta-1)\,(\phi'_{x'})^2 - c_0{'}^2\tan\theta\, x' + c_0{'}^2 + c_0{'}^2\eta' \\ &\quad + \frac{f'}{2}u_0{'}c_0{'}\phi'' + (\beta-1)u_0{'}c_0{'}\int\phi'_{x'}\eta'_{x'}\mathrm{d}x \\ &= -\epsilon\phi'^{(1)}_{\xi'} - \epsilon^2\phi'^{(2)}_{\xi'} - \epsilon^3\phi'^{(3)}_{\xi'} - \cdots \\ &\quad + \epsilon^2\phi'^{(1)}_{\tau'} + \epsilon^3\phi'^{(2)}_{\tau'} + \epsilon^4\phi'^{(3)}_{\tau'} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\beta-1)\Big\{\epsilon^2\left(\phi'^{(1)}_{\xi'}\right)^2 + 2\epsilon^3\phi'^{(1)}_{\xi'}\phi'^{(2)}_{\xi'} \\ &\qquad + \epsilon^4\left(\phi'^{(2)}_{\xi'}\right)^2 + \cdots\Big\} \\ &\quad - c_0{'}^2\tan\theta\, x' + c_0{'}^2 \\ &\quad + c_0{'}^2\left(\epsilon\eta'^{(1)} + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \epsilon^3\eta'^{(3)} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{f'}{2}u_0{'}c_0{'}\Big\{ \\ &\qquad \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)} + \left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(1)}_{y'} + \cdots \\ &\qquad + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)} + \left(\epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(2)}_{y'} + \cdots \\ &\qquad + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(3)} + \left(\epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{9}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(3)}_{y'} + \cdots\Big\} \\ &\quad + (\beta-1)u_0{'}c_0{'}\Big\{\epsilon^2\int\phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'}d\xi' \\ &\qquad + \epsilon^3\int\phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'}d\xi' + \epsilon^3\int\phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'}d\xi' \\ &\qquad + \epsilon^4\int\phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'}d\xi' + \cdots\Big\} = 0\end{aligned} \tag{18}$$

である．

4. 波動方程式および考察

基礎方程式の摂動展開方程式を満足する必要条件は，各方程式において ϵ の次数別の項の和がそれぞれ 0 となることである．したがって，以上の摂動展開方程式から ϵ の次数別の関係式を求め，$\epsilon^{\frac{5}{2}}$ までの関係式から $\eta'^{(1)}$ の関係式に集約し，$\eta'^{(1)}$ の方程式の導出結果だけを記せば下記のようである．ただし，$\eta'^{(1)}$ を η' と記している．

$$\begin{aligned}&\eta'_{\tau'} + \frac{1}{2}\left\{(2\beta+1)c_0{'}^2 + (\beta-1)u_0{'}c_0{'}\right\}\eta'\eta'_{\xi'} \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_0{'}^2} - \frac{1}{2}\right)f'u_0{'}c_0{'}\eta'_{\xi'\xi'} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{2+c_0{'}^4}{2c_0{'}^2} - \frac{3}{2}\right)\eta'_{\xi'\xi'\xi'} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

得られた式 (19) は KdV-Burgers 型の方程式である．この結果によると流れの流速分布形の影響を示す運動量補正係数 β は第 2 項の非線形項に関係し，流れの抵抗を表す摩擦損失係数 f' は第 3 項の散逸項に関係している．また，第 4 項の分散項の係数には β や f' がここでの摂動展開の近似では含まれていないため，それらの影響が少ないことを示している．

参考文献

1) Arai M., Huebl J. and Kaitna R.: Occurrence conditions of roll waves for three grain-fluid models and comparison with results from experiments and field observation. *Geophysical Journal International* , Vol.195, Issue 3, pp.1464-1480 (doi:10.1093/gji/ggt352), 2013.

2) Arai, M.: Wave equation and Some solutions on intermittent debris flow, *International Journal of Erosion Control Engineering* , Vol.10, No.1, pp.39-46, 2017.