北陸の緊急輸送道路ネットワークのスペクトル解析

金沢大学　正会員　中山　晶一朗
WDB　松井　千里
金沢大学　正会員　○小林　俊一

1. はじめに

東日本大震災や阪神淡路大震災などの経験から災害時でも機能する道路ネットワークの重要性が深く認識されるようになった．災害時にも機能できる道路ネットワークの整備のためには様々な方法があるが，道路ネットワークで脆弱な部分を特定し，その部分を補強することで道路ネットワーク強靭性を高めることが可能と考えられる．本研究では，道路ネットワークをグラフ化し，そのラプラシアン行列のスペクトル解析によってネットワークの形状の上で道路ネットワークがどの部分脆弱であるのかを特定することを試みる．

2. 道路ネットワークのラプラシアン行列

道路ネットワークをノードとリンクで表現し，その接続関係を隣接行列で記述する．隣接行列 $\mathbf{A}$ の成分 a_{ij} は，ネットワークのノード i とノード j がリンクにより結ばれていると 1 で，結ばれていないと 0 となる．各ノードから出ているリンクの数は次数と呼ばれ，その次数を対角成分とした行列を次数行列（次数対角行列）とし，$\mathbf{D}$ とする．隣接行列 $\mathbf{A}$ と次数行列列 $\mathbf{D}$ を用いると，ラプラシアン行列 $\mathbf{L}$ は $\mathbf{D}-\mathbf{A}$ である．ベクトル $\mathbf{x}$ に対するラプラシアン行列の二次形式は $\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}=\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}a_{ij}\left(x_i-x_j\right)^2$ となり，見通しが良くなる．ここで，N はノード集合，^{T} は転置である．

ラプラシアン行列のスペクトル解析（固有値分析）によって，グラフの様々な性質を解明することができる．ラプラシアン行列の固有値は全て非負であり，最小固有値は常に 0 である [1)]．連結しているネットワークでは，第二最小固有値は代数的連結度（algebraic connectivity）と呼ばれ [2)]，ネットワーク連結性の指標の一つとなっている．

道路ネットワークの連結が疎で脆弱な部分を見つけるために，ネットワークを２分割することを考えよう．ネットワーク内の（複数もしくは一つの）リンクを通行不能とするとネットワークが非連結な２つのサブネットワークに分かれるが，このようなリンクの数がカットサイズである．カットサイズを最小化し，それに該当するリンクがネットワークで脆弱な部分とみることができる．つまり，通行不能リンク数が少数でも非連結になってしまい，その部分が弱いと言えるだろう．ただし，ネットワークの端部のリンクではその一つのリンクが通行不能となっただけでも孤立ノードが出てしまう．このようなネットワーク全体にはほとんど影響が出ないケースを避ける方が望ましく，２分割されたそれぞれに含まれるノード数も考慮する必要がある．ノード数も考慮したカットの一つとして比率カット（ratio cut）がある [3)]．集合N_1とN_2に２分割する通常のカットサイズを$C[N_1,N_2]$とした時，比率カットサイズ（ratio cut size）は

$$RC[N_1,N_2]=\frac{C[N_1,N_2]}{n_1}+\frac{C[N_1,N_2]}{n_2} \tag{1}$$

となる．ただし，n_1とn_2はそれぞれ集合N_1とN_2内のノード数である．ここで，

$$x_i=\begin{cases}\sqrt{n_2/n_1} & i\in N_1\\ -\sqrt{n_1/n_2} & i\in N_2\end{cases} \tag{2}$$

とし，x_i を成分に持つベクトルを $\mathbf{x}$ とする．ノード i とノード j が両方ともに同じ集合に属するとき，$x_i-x_j=0$ となる．よって，二次形式 $\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}$ は２つの集合を跨ぐリンクに対してのみ考えればよく，

$$\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}=\frac{1}{2}\sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_2}a_{ij}\left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}+\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i\in N_2}\sum_{j\in N_1}a_{ij}\left(-\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}-\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right)^2=\sum_{i\in N_2}\sum_{j\in N_1}a_{ij}\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}+2\right) \tag{3}$$

となる．また，$C[N_1,N_2]=\sum_{i\in N_2}\sum_{j\in N_1}a_{ij}$ であるため，

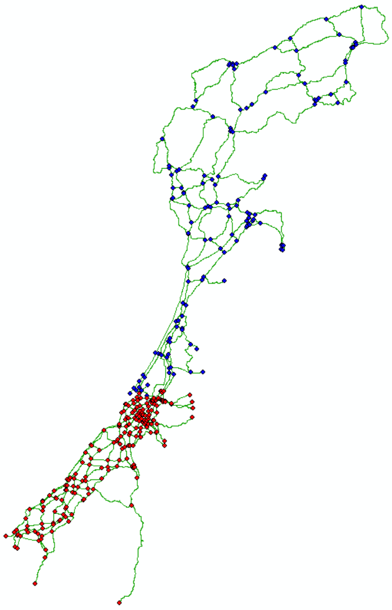

図-1 石川道路網での比率最小２分割

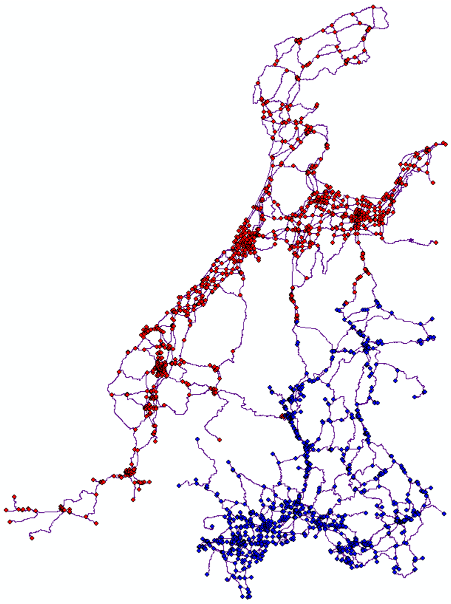

図-2 北陸道路網での比率最小２分割

$$\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x} = C[N_1, N_2]\left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} + 2\right) = C[N_1, N_2]\left(\frac{n_2+n_1}{n_1} + \frac{n_1+n_2}{n_2}\right) = n\ \ RC[N_1, N_2] \tag{4}$$

となる [3]．したがって，式(2)に従う $\mathbf{x}$ について，二次形式 $\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}$ を最小化することは最小比率２分割を求めることになる．しかし，式(2)は x_i が離散である条件を課すことであり，大規模な離散最適化問題を解くことは一般に困難である．そこで，x_i は実数値をとることができるとする以下の緩和問題を考える．

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \qquad s.t. \quad \mathbf{x}\perp\mathbf{1}, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{x} = n \tag{5}$$

となる．ここで，n は全ノード数，$\mathbf{1}$ は全成分が１のベクトルである．$\mathbf{x}^T\mathbf{L}\ \mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ はレイリー商と呼ばれ，その最小化は最小固有値を求める問題となる [4]．ラプラシアン行列の最小固有値は 0 であり [1]，その固有ベクトルは $\mathbf{1}$ となる．しかし，$\mathbf{x}\perp\mathbf{1}$ の条件のため，式(5)は第二最小固有ベクトルを求める問題となる．つまり，第二最小固有ベクトルを求めることは（緩和された条件下で）最小の比率２分割を求める問題となる．

3. 北陸の緊急輸送道路ネットワークへの適用

ノード数が 362 でリンク数が 582 の石川県内緊急輸送道路ネットワークとノード数が 2034 でリンク数が 2879 の北陸３県及び岐阜県の緊急輸送道路ネットワークの２つの道路ネットワークのスペクトル分析を行った．**図-1**，**図-2** がそれぞれのネットワークの最小比率２分割（第二最小固有値）の結果である．それぞれの図で赤いノードと青いノード２つに分かれており，その境界部分がネットワークで脆弱な部分である．石川県ネットワークでは金沢市の北東に河北潟があり，その部分が脆弱となっている．北陸・岐阜ネットワークでは岐阜県と福井・富山県の境の山間部分でリンクが疎であり，ネットワークとして脆弱である．これらは直感的にも理解できるものであり，本研究の手法の妥当性を支持するものと言える．

謝辞：本研究は国土交通省国土技術政策総合研究所の委託研究により実施したものである．ここに記して感謝いたします．

参考文献

1) 仁平政一・西尾義典：グラフ理論序説改訂版，プレアデス出版，安曇野，2001.

2) Fiedler, M.: Algebraic connectivity of graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23, pp. 298-305, 1973.

3) von Luxburg, U.: A tutorial on spectral clustering, *Statistics and Computing*, Vol. 17, pp. 395-416, 2007.

4) ストラング：線形代数とその応用，産業出版，東京，1978.