

傾斜水路上の浅水流の波動方程式における初期条件の波形と位相に関する一検討

名城大学 正会員 新井宗之
名城大学 学生会員 森川智仁

1. はじめに

土石流や土砂流の間欠的なサージ状の流下現象は、日本の桜島の野尻川、長谷川等で観測され、ヨーロッパアルプスの山間部でも間欠的な土石流や土砂流サージが観測されている。中国雲南省の粘性土石流は長時間に亘って流下することで知られている。近年の集中豪雨による土石流災害などでも短時間に複数回の流下のあることも目撃されている。しかし、このような傾斜水路上の間欠的な転波列性サージの波動性についてはまだあまり明らかにされていない。本研究では、すでに導出している波動方程式において長波の波動とすると Burgers 方程式型になることを示している。この波動方程式が水路実験から得られる方程式の係数の条件において、初期条件が波形に与える影響について明らかにすることを目的とする。波形の計算には数値解析を用いるが、解析解からの検討も行う。

2. 波動方程式

流れは、非圧縮 ($\text{div} \vec{v} = 0$)、非回転 ($\text{rot} \vec{v} = 0$) の流体として取り扱い、速度ポテンシャル ϕ を用いると、流下方向を x 、その水深方向を y とするとラプラス方程式 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (1) の関係がある。水底 ($y = -h_0$) での境界条件は、水深方向の流速成分を v とすると、 $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (2) である。平均水深 ($y = h_0$) からの水面の変動量 $\eta(x, t)$ が、水面の流体粒子とともに動く条件は、 $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ (3) である。浅水流の運動方程式として次式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{u}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2} \frac{u^2}{R} \quad (1)$$

ここに、 u : x 方向の断面平均流速、 A : 流積、 g : 重力加速度、 θ : 水路勾配、 R : 径深、 h : 水深、 β : 運動量補正係数、 f' : 摩擦損失係数。

ここでは、水深 h に比して水路幅 B が広い矩形断面の一樣水路で、径深 R が $R \approx h$ として取り扱う。実験結果や観測結果から水深 h と波長 L の比が $h/L < 0.01$ であるため、長波(極浅海波)として考える。さらに、水面変動や流速変動は平均値に比して微小とし、流れの底面せん断応力における摩擦損失係数などの抵抗係数は平均値として定数と考える。また、河道勾配 θ は $\tan \theta < 1$ で、流れは Froude 数が $F_r > 1$ の流れを対象とする。無次元量にはプライム(「'」)を付し、次のように定義する。 $\phi' = \phi/(h_0 v_{p0})$ 、 $x' = x/h_0$ 、 $y' = y/h_0$ 、 $t' = t v_{p0}/h_0$ 、 $\eta' = \eta/h_0$ である。ここに、 η は平

均水深 h_0 からの変動量であり、 v_{p0} は Gardner-Morikawa 変換で用いている速度の次元を有するパラメータで、移動座標系においては座標の移動速度を意味しているパラメータである。Gardner-Morikawa(G-M) 変換は、 $\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x - v_{p0}t)$ 、 $\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t$ で、それぞれの無次元量は、 $\xi' = \xi/h_0 = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x' - t')$ 、 $\tau' = \tau v_{p0}/h_0 = \epsilon^{\frac{3}{2}}t'$ である。ここでは式(4)における運動量補正係数 β を $\beta = 1$ として取り扱う。

以上により、漸減摂動法を用いて展開パラメータ ϵ の一次の項の $\eta^{(1)}$ について解くと次式の波動方程式を得る。ただし、 $\eta^{(1)}$ を η' と記し、 $u_0' = u_0/c_0$ 、 $c_0' = c_0/v_{p0}$ 、 $c_0 = \sqrt{gh_0 \cos \theta}$ とする。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + a_1 \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - a_2 \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} + a_3 \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi'^3} = 0 \quad (4)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_1 &= (3/2)c_0'^2 \\ a_2 &= (1/2)(1/c_0'^2 - 1/2)\tan \theta (c_0'/u_0') \\ a_3 &= (1/2)((2 + c_0'^4)/(2c_0'^2) - 3/2) \end{aligned} \quad (5)$$

a_1 は $c_0'^2 > 0$ であるから $a_1 > 0$ である。また、水路勾配は流下方向の座標軸と水平との時計回りの角度 θ で $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を対象とすると $\tan \theta > 0$ であり、 $\frac{c_0'}{u_0'} > 0$ である。 a_2 、 a_3 の符号は $c_0'^2$ のおおきさにより 6 種類の組み合わせがあり、それにより式(4)の方程式が変わる。これは c_0' の値の大きさにより解の分岐が複雑に生じることを意味しているとも言える。

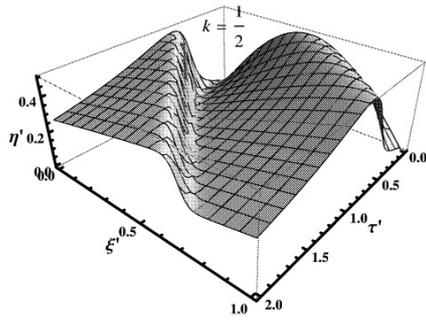
v_{p0} が $v_{p0} \approx c_0 < u_0$ の場合、 $0 < c_0'^2 \leq 1$ であるから、式(5)の左辺第3項、第4項の係数の符号はそれぞれ $\frac{1}{2}(\frac{1}{c_0'^2} - \frac{1}{2})\tan \theta \frac{c_0'}{u_0'} > 0$ 、 $\frac{1}{2}(\frac{2+c_0'^4}{2c_0'^2} - \frac{3}{2}) > 0$ である。

一方、浅水場での波動において長波とすると $v_{p0} = \sqrt{gh_0 \cos \theta}$ とすることが用いられている。実験や実際の観測例では水深・波長比が長波の領域であることから、同様に考えると $c_0' = \frac{c_0}{v_{p0}} = 1$ で、また $a_3 = 0$ となり、式(5)は次式となる。

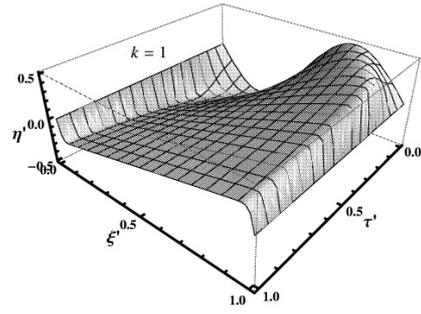
$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + a_{10} \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - a_{20} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \quad a_{10} = \frac{3}{2}, \quad a_{20} = \frac{1}{4} \frac{\tan \theta}{u_0'} \quad (7)$$

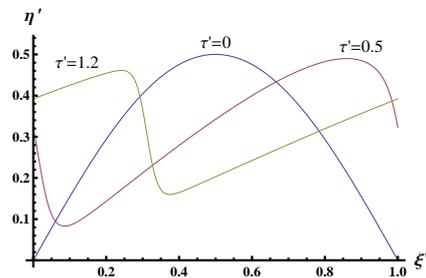
これは Burgers 方程式と同形であり、特定な境界条件、初期条件については Cole-Hopf 変換を用いて解析解を得ることができる¹⁾。ここでは数値解析および解析解により検討する。



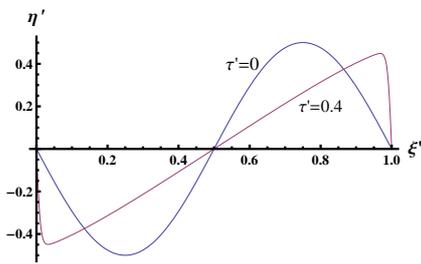
(a) $\tau' = 0 \sim 2.0$



(a) $\tau' = 0 \sim 1.0$



(b) $\tau' = 0, 0.5, 1.2$



(b) $\tau' = 0, 0.4$

図1 波数 $k = \frac{1}{2}$ 初期条件 $\eta'(\xi', 0) = \sin(\pi\xi')$

図2 波数 $k = 1$ 初期条件 $\eta'(\xi', 0) = -\sin(2\pi\xi')$

3. Burgers 方程式の初期条件と波形形成過程

数値解析に用いた係数は実験結果より定めている。実験は、長さ 56m、幅 10cm、深さ 15cm の循環式直線水路で行った。清水の実験において、流量 $Q = 365.0 \sim 1884.4 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、平均水深 $h_0 = 0.70 \sim 1.45 \text{ cm}$ 、平均流速 $u_0 = 52.2 \sim 146.6 \text{ cm/s}$ で、これより式 (7) の a_2 は $a_2 = 0.00657 \sim 0.00293$ である。ここでの数値解析では実験結果の中間的な値として $a_2 = 0.004$ を用いている。

ここでは初期条件の影響として波数 k の影響について検討する。計算条件は、周期 T を $T = l$ とし、初期条件として $\tau' = 0$ で波数 $k = 1/2$ の正弦波 $\eta'(\xi', 0) = \sin(\pi\xi')$ 、境界条件として $\eta'(0, \tau') = 0$ 、 $\eta'(l, \tau') = 0$ の場合と、波数 $k = 1$ の初期条件 $\eta'(\xi', 0) = -\sin(2\pi\xi')$ 、境界条件は同じ $\eta'(0, \tau') = 0$ 、 $\eta'(l, \tau') = 0$ である。それぞれの計算結果を図-1 と図-2 に示している。

図-1 は波数 $k = 1/2$ の場合で、図-1 (a) は無次元時間 τ' を右側の軸で奥(右)から手前(左)に $\tau' = 0 \sim 2.0$ 、 ξ' を左側の軸で左から右へ $\xi' = 0 \sim 1.0$ 、水面の変動 η' を鉛直方向に示している。図-1 (b) は $\xi' - \eta'$ の関係を $\tau' = 0, 0.5, 1.2$ で示している。この場合、境界条件を $\eta'(0, \tau') = \eta'(l, \tau')$ としているため、波形の変化は右端 $\xi' = l$ から左端 $\xi' = 0$ に接続されている。この計算結果によると波数 $k = 1/2$ の波形は波数 $k = 1$ の波形に変形するとともに位相が生じていることが分かる。図-2 は波数 $k = 1$ の場合で、図-1 の場

合同様に図-2 (a) は波形の変化を連続的な時間 τ' で示し、図-2 (b) は $\xi' - \eta'$ の関係を $\tau' = 0, 0.4$ で示している。この波数 $k = 1$ の場合は初期条件の波数のまま変形し位相が生じていない。

これは次の理由によるものと考えられる。式 (6) は、 $u(\xi', \tau')$ を導入し Cole-Hopf 変換して $\eta = -(4/3)\mu(1/u)\partial u/\partial \xi'$ (ただし、 $\mu = (1/4) \tan \theta/u_0'$) を用いると、線形熱伝導方程式 $\partial u/\partial \tau' = \mu \partial^2 u/\partial \xi'^2$ となる。この図-1 の波数 $k = 1/2$ 、周期 $T = l$ 、区間 $0 \leq \xi' \leq 1$ の場合、フーリエ級数による解は、
$$u(\xi', \tau') = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos 2n\pi/l + B_n \sin 2n\pi/l\} \quad (8)$$
 ここに、 $a_0 = I_0(lr/\pi)$ 、ただし、 I_0 : 第1種変形 Bessel 関数、 $r = 3/(4\mu)(a/2)$ 、 a : 振幅、
$$A_n = 2/\ell \int_0^\ell \exp[\ell r/\pi \cos(\pi v/\ell)] \cos(2n\pi v/\ell) dv,$$
$$B_n = 2/\ell \int_0^\ell \exp[\ell r/\pi \cos(\pi v/\ell)] \sin(2n\pi v/\ell) dv,$$
 $n = 1, 2, \dots$ である。

$k = 1/2$ の場合 $A_n \neq 0$ 、 $B_n \neq 0$ であるため式 (8) の右辺の正弦、余弦関数の和は余弦関数に位相を含む関数となるため波形に位相が生じるものと考えられる。しかし、 $k = 1$ の場合は、 $B_n = 0$ となるため位相が生じないものと考えられる。参考文献: 1) 新井宗之, 安田孝志, 中川一: 山地河道における浅水流に関する波動方程式の導出とその解析解の検討, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol.69, No.4, I-961-I-966, 2013.