交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定

金沢大学　学生会員　廖　文韜
金沢大学　正会員　中山　晶一朗
金沢大学　フェロー　高山　純一

1. はじめに

交通ネットワークの計画・分析の際，研究・実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．実際に交通ネットワーク均衡モデルを適用する際には，各種パラメータの設定が必要となる．リンク交通量を用いて、交通ネットワーク均衡モデルと整合性を保ち、パラメータを推定するのは重要だとおもう．

2. 既存研究の整理と本研究の位置づけ

これまでリンク交通量データを用いたパラメータ推定は，OD 交通量の推定の研究を始め，多くの研究がなされている。通常の定式化された確率的配分モデルは，経路変数を用いて表現されている。そのため，交通量を定義式から計算しようとすると，経路を列挙しなければならない．しかし，実際的な交通ネットワークでは、経路の個数は膨大であり，その列挙は不可能である．そのような考えに基づいて，経路を列挙せずにロジット型確率配分を行う方法が，以下に述べる Dial のアルゴリズムである．

起点から他の全てのノードへの最小交通費用 $c(i)$ を計算：

$$c(i) \leftarrow C\min[r \rightarrow i] \qquad (1)$$

dial リンク尤度 $L[i \rightarrow j]$ 計算：

$$L[i \rightarrow j] = \begin{cases} \exp[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}] & c(j) > c(i) \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (2)$$

ここで、ｃ：最小交通費用、ｔ：リンク間の自由旅行時間、θ：推定されるパラメータ

前進処理：

起点から最小交通費用 $c(i)$ の値の昇順（ r から近い順）にノードを考える．各ノード i から流出するリンクのリンク・ウェイト $W[i \rightarrow j]$ を計算：

$$W[i \rightarrow j] = \begin{cases} L[i \rightarrow j] & for\, i = r \\ L[i \rightarrow j]\sum_{m \in I_i} W[m \rightarrow i] & otherwise \end{cases} \qquad (3)$$

なお，I_i はノード i に流入するリンクの始点集合である．

後退処理：

$c(i)$ の降順（ r から遠い順）にノードを考える．各ノード j に流入するリンクの交通量を計算する．

$$x_{ij} = \left(Q_{rj} + \sum_{m \in O_j} x_{jm} \right) \frac{W[i \rightarrow j]}{\sum_{m \in I_j} [m \rightarrow j]} \qquad (4)$$

O_j はノード j に流出するリンクの終点集合を表す．

（1）式の θ が推定される対象だ，前の研究では，観測リンク交通量と計算リンク交通量の最小二乗誤差となるパラメータを推定した，一般化最小二乗法，最尤法など様々なパラメータ推定が行われている．

3. 最尤推定法

OD 交通量はポアソン分布に従って確率変動しており，各利用者はロジットモデルに従った経路選択を行っていると仮定する [1), 2)]．この場合，経路交通量も独立なポアソン分布 Po[m_{ij}] に従う．

OD ペア i の OD 交通量の平均を，その経路 j の経路交通量の平均を m_{ij} とする．経路交通量 m_{ij} が十分に大きい場合，ポアソン分布の平均と分散はともに m_{ij} であるため，中心極限定理により平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 N[m_{ij} , m_{ij}]に従うと近似することができる．また，ポアソン分布は取り扱いが難しいため，経路交通量は独立な正規分布とみなす [3)]．このとき，リンク交通量ベクトル **X** は以下の多変量正規分布として与えることができる．

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} \qquad (5)$$

ただし，μ は平均リンク交通量ベクトルでその要素は μ_n，Σ はリンク交通量の分散共分散行列，Σ^{-1} は Σ の逆行列，$|\Sigma|$ は Σ の行列式，T は転置，n はリンクの総数である．

また，平均経路交通量のベクトル m （その要素 m_{ij} ）を用いると，$\Sigma = \Delta diag(m)\Delta^T$ である[1]．ただし $\mathbf{\Delta}$ はリンク・経路接続行列（パスリンクインシデックスマトリックス），$diag(m)$ は m の各成分を対角成分に持つ対角行列である．つまり，$diag(m)$ は経路交通量ベクトル Y の分散共分散行列であり，各経路交通量は独立であるため，それは対角行列となる．ここで，μ=Δm が成立しているため，$f_x(x)$ は $f_x(x,m)$ と考えることもできる．なお，このようなリンク交通量の確率密度関数を定義するためには，$|\Sigma|$ が 0 でないことが必要である．例えば，本来ならば一つのリンクで記述すべきものを 2 つの連続隣接のリンクで表現した場合を考える．その 2 つのリンクは全く同じリンク交通量及び分布となる．このように他のリンク交通量（の確率変数）によって一意に表現できるリンク（の確率変数）は除去しなければ，$f_x(x)$ は定義できないことに注意が必要である．

リンク交通量の観測値 X が与えられた場合、以下の対数尤度関数 L を定義することができる。

$$L(\theta \mid X) = \ln f_X(X) \tag{6}$$

4. 非線形解法

数値解析の分野において、ニュートン・ラフソン法とは、方程式系を数値計算によって解くための反復法による求根アルゴリズムの 1 つである．対象とする方程式系に対する条件は、領域における微分可能性と 2 次微分に関する符号だけであり、線型性などは特に要求しない．収束の速さも 2 次収束なので古くから数値計算で使用されていた．

まず初めに、予想される真の解に近いと思われる値をひとつとる．次に、そこでグラフの接線を考え、その θ 切片を計算する。この θ 切片の値は、予想される真の解により近いものとなるのが一般である．以後、この値に対してそこでグラフの接線を考え、同じ操作を繰り返していく．

の付近に適当な値 x0 をとり､次の漸化式によって、x に収束する数列を得ることができる場合が多い．

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{f(\theta_1)}{f'\theta_1)} \tag{7}$$

ニュートン法で､導関数を求める必要があるが､導関数は 0 になると、導関数は分母のため、θ は続いて更新できない、計算はそこにとまって、結果も出られない．ほか、導関数は 0 に近過ぎて、その時、更新した θ は無限大になるため、溢れる可能性もある．

逐次近似によって構成していく方法がいくつか提案されている．これらの方法を，準 Newton 法と呼び，H(k)によって、形が違う準ニュートン法がもらえる。準ニュートン･Broyden 法のアルゴリズムは以下に示す．

初期点 θ(0)を与え，H(0)の値を Hesse 行列の逆行列とする．$\Delta\theta_k$ を計算し，$//\Delta\theta_k// < \varepsilon$ ならば，計算を終了する．行列 H(k+1)を計算します．計算方法として，以下のような方法があります．ただし，各方法において，

$$\theta_{k+1} = \theta_k - H_k f(\theta_k) \tag{8}$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\Delta\theta_k - H_k Y_k)(\Delta\theta_k)^T H_k}{(\Delta\theta_k)^T H_k Y_k} \tag{9}$$

ここで，$\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$，$y_k = f(\theta_{k+1}) - f(\theta_k)$ とします．

5. まとめ

Fortran でプログラムを組むとき，変量と計算モジュールがたくさんあるので，変量をサブプログラム間の送り伝えるのは間違いやすい，その時、おかしい結果が出る恐れがある．配分したリンク交通量で経路交通量を求めるには，接続行列の形をよく考えないと，経路交通量を求める方程式系の解は一つではなくなる，ほか，このリンクをリンク・経路接続行列から除去しなければ，Σ の行列式は 0 になり，逆行列も求められなく，結果も出られなくなる．

参考文献：

1）Clark, S. and Watling, D.：ModelingNetwork Travel Time Reliability under Stochastic Demand, *Transportation Research*Vol.39B, pp.119-140, 2005.

2) Nakayama, S., Connors, R. and Watling, D. : Estimation of Parameters of Network Equilibrium Models: A Maximum Likelihood Method and Statistical Properties of Network Flow, Transportation and Traffic Theory: *Proceedings of the 18th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, accepted, 2009.

3) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，所俊宏：現実道路ネットワークの時間信頼性評価のための確率的交通均衡モデル及びそれを用いた情報提供効果分析，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.537-547, 2006.