対応原理を用いた粘弾性体同定解析への Wavelet 変換の適用

信州大学工学部　学生員　○松浦真也
信州大学工学部　正会員　大上俊之
信州大学工学部　正会員　小山　茂

１．はじめに

線形システムに対してウェーブレット変換を行うと，ウェーブレットスペクトラム上のマザーウェーブレットにデータの特徴が集約されるという性質がある．この性質を利用することにより，長方形行列の近似逆行列を求めることが可能である[1)].

本研究では粘弾性材料を対象に観測値から逆に材料定数を推定するパラメータ同定解析にウェーブレット変換を適用することを試みる．粘弾性解析には線形粘弾性問題を Laplace 像空間での弾性問題に置換して解析を行う対応原理[2)]を用いる．

２．粘弾性体パラメータ同定解析の基礎式

対応原理によれば線形粘弾性体の解は，Laplace 像空間においてこれと同じ形状，境界条件を有する弾性問題に置換して解析し，その解を Laplace 逆変換することにより所要の粘弾性問題の解が得られる．

Laplace 像空間における粘弾性問題のつりあい方程式および境界条件は次のようになる．

(つりあい方程式)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma_s}=0 \quad \text{領域}\partial\Omega\text{内} \tag{1}$$

(境界条件)

$$\boldsymbol{u}=\widehat{\mathbf{u}_s} \quad \text{境界}\partial\Omega_u\text{上} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{\sigma_s})\boldsymbol{n}=\Delta\widehat{\mathbf{t}_s} \quad \text{境界}\partial\Omega_t\text{上} \tag{3}$$

ここに，境界$\partial\Omega$は$\partial\Omega=\partial\Omega_t+\partial\Omega_u$，$\boldsymbol{n}$は境界上の外向き単位法線ベクトルである．なお, 添え字 $\boldsymbol{s}$ は Laplace 像空間でのものを表わす．

これらに仮想仕事の原理を適用することによって，Laplace 像空間での有限要素の剛性方程式が次のように得られる．

$$\boldsymbol{K_s}(\boldsymbol{P_s})\boldsymbol{U_s}=\boldsymbol{F_s} \tag{4}$$

ここに，

$$\boldsymbol{K_s}(\boldsymbol{P_s})=\int_\Omega \boldsymbol{B_s}^T\boldsymbol{D_s}(\boldsymbol{P_s})\boldsymbol{B_s}dv \tag{5}$$

$$\boldsymbol{F_s}=\int_{\partial\Omega_t}\boldsymbol{N_s}^{\boldsymbol{T}}\Delta\widehat{\boldsymbol{t}_s}\boldsymbol{dS} \tag{6}$$

である．$\boldsymbol{N_s}$ および $\boldsymbol{B_s}$ は Laplace 像空間での形状関数マトリックス，変位ひずみ関係マトリックスであり，$\boldsymbol{P_s}$ は同定すべき未知パラメータからなる Laplace 像空間におけるベクトルである．

一方，観測境界条件は有限要素の節点値として次のように離散化される．

$$\boldsymbol{S_{us}U_s}=\overline{\boldsymbol{U_s}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{S_{ts}F_s}=\overline{\boldsymbol{F_s}} \tag{8}$$

ここに，$\overline{\boldsymbol{F_s}}$，$\overline{\boldsymbol{U_s}}$ は該当する節点の Laplace 像空間での荷重および変位の測定データであり, $\boldsymbol{S_{ts}}$と$\boldsymbol{S_{us}}$はそれぞれ対応する節点荷重，節点変位ベクトルをセレクトするマトリックスである．未知ベクトル$\boldsymbol{P_s}$を決定するために式(4)，(7)，(8)に対して， Newton 法を適用することにより $\boldsymbol{k}$ 回目の繰り返し計算ステップに対して，逆解析のシステム方程式が

$$\boldsymbol{A_s}dx_s=\boldsymbol{R_s} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A_s}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K_s}(\boldsymbol{P_s}^{\boldsymbol{k}}) & -\boldsymbol{I_s} & (\frac{\partial \boldsymbol{K_s}}{\partial \boldsymbol{P_s}}\boldsymbol{U_s})^{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{S_{su}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S_{st}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{dx_s}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{dU_s}^{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{dF_s}^{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{dP_s}^{\boldsymbol{k}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U_s}^{\boldsymbol{k+1}}-\boldsymbol{U_s}^{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{F_s}^{\boldsymbol{k+1}}-\boldsymbol{F_s}^{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{P_s}^{\boldsymbol{k+1}}-\boldsymbol{P_s}^{\boldsymbol{k}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_s} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_s}^{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{P_s}^{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{U_s}^{\boldsymbol{k}} \\ \overline{\boldsymbol{U_s}} - \boldsymbol{S_{su}}\boldsymbol{U_s}^{\boldsymbol{k}} \\ \overline{\boldsymbol{F_s}} - \boldsymbol{S_{st}}\boldsymbol{F_s}^{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix}$$

と得られる．

ここで，Laplace 像空間での未知パラメータの数と観測変位数が違う場合，システムマトリックス$\boldsymbol{A_s}$が長方形行列となり，同定できない場合がある．これをウェーブレット変換による近似逆行列の導出により解消する．

3. Wavelet 変換の適用

大きさn行m列の長方形行列$\boldsymbol{C}$について考えると，ウェーブレット変換のデータ圧縮の性質を利用し，長方形行列C の近似逆行列$\boldsymbol{C}_{app}^{-1}$ (m行n列) が次の手順で得られる．

1. ウェーブレット変換をするために，$\boldsymbol{C}$(n行m列)に大きさℓ行ℓ列のゼロマトリックスを重ね合わせ$\boldsymbol{C}_{+zero}$(ℓ行ℓ列) を求める．ここに，ℓは2のべき乗の数である．
2. $\boldsymbol{C}_{+zero}$(ℓ行ℓ列) をウェーブレット変換し，ウェーブレットスペクトラム$\boldsymbol{C'}$(ℓ行ℓ列) を得る．
3. ウェーブレットスペクトラム$\boldsymbol{C'}$に対して任意の大きさにスペクトラム$\boldsymbol{C'}_{cut}$(正方行列) を切り出す.
4. $\boldsymbol{C'}_{cut}$ に対して逆行列$\boldsymbol{C'}^{-1}_{cut}$を求める．
5. $\boldsymbol{C'}^{-1}_{cut}$ にℓ行ℓ列のゼロマトリックスを重ね合わせ，$\boldsymbol{C'}^{-1}_{cut+zero}$ (ℓ行ℓ列) を得る ．
6. スペクトラム$\boldsymbol{C'}^{-1}_{cut+zero}$に対して逆ウェーブレット変換し，$\boldsymbol{C}^{-1}_{cut+zero}$ (ℓ行ℓ列) を求める．
7. $\boldsymbol{C}^{-1}_{cut+zero}$ からm行n列のマトリックスを切り出して，$\boldsymbol{C}$ の近似逆行列$\boldsymbol{C}^{-1}_{app}$ (m行n列) を得る．

したがって，システムマトリックス$\boldsymbol{A_s}$に対して上記の手順により$\boldsymbol{A_s}$の近似逆行列求めることにより，Laplace 像空間において粘弾性体の材料定数を同定することができる．これを Laplace 逆変換することによって原空間での粘弾性解を得ることになる．

4. 数値 Laplace 逆変換

一般に Laplace 像空間での解に Laplace 逆変換を施して原空間における解を求めることは困難なことが多い．このような場合でも，Laplace 像空間での解が数値的に与えることができる場合には，数値 Laplace 逆変換を用いて解を近似することができる．

同定すべき粘弾性材料定数を表わす緩和関数の体積成分を$\boldsymbol{K(t)}$，偏差成分を$\boldsymbol{G(t)}$とする．弾性‐粘弾性の対応原理により同定される材料定数$\boldsymbol{K_s}$，$\boldsymbol{G_s}$は，Laplace 変換パラメータ$\boldsymbol{s = \gamma_1, \gamma_2 \dots\dots \gamma_n}$に対して，

$$\boldsymbol{K_s = s\bar{K}(s) = \gamma_1 \bar{K}(\gamma_1),\ \gamma_2 \bar{K}(\gamma_2),\ \dots \gamma_n \bar{K}(\gamma_n)} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{G_s = s\bar{G}(s) = \gamma_1 \bar{G}(\gamma_1),\ \gamma_2 \bar{G}(\gamma_2),\ \dots \gamma_n \bar{G}(\gamma_n)} \quad (11)$$

である．数値 Laplace 逆変換には変換パラメータを任意に選択できる Schapery の方法[3]を用いる．同定する材料を 3 要素からなる粘弾性材料と仮定すると，

$$\boldsymbol{K(t) = K_0 + K_1 e^{-K_1 t/\eta_{K_1}} + K_2 e^{-K_2 t/\eta_{K_2}}} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{G(t) = G_0 + G_1 e^{-G_1 t/\eta_{G_1}} + G_2 e^{-G_2 t/\eta_{G_2}}} \quad (13)$$

ここに，$\boldsymbol{\eta}$は粘性係数，$\boldsymbol{K_0}$，$\boldsymbol{K_1}$，$\boldsymbol{K_2}$は体積弾性係数，$\boldsymbol{G_0}$，$\boldsymbol{G_1}$，$\boldsymbol{G_2}$はせん断弾性係数を表わしている．式(12)，(13)に Laplace 変換を施すと，

$$\boldsymbol{K_s = s\bar{K}(s) = K_0 + \frac{K_1 s}{s + K_1/\eta_{K1}} + \frac{K_2 s}{s + K_2/\eta_{K2}}} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{G_s = s\bar{G}(s) = G_0 + \frac{G_1 s}{s + G_1/\eta_{G1}} + \frac{G_2 s}{s + G_2/\eta_{G2}}} \quad (15)$$

式(10)，(11)に示された各々の値が式(14)，(15)を満たさなければならない．よって Newton の非線形最小二乗法を適用し，式(14)，(15)における未知パラメータ $\boldsymbol{K_i, G_i, \eta_{Ki}, \eta_{Gi}}$を決定すれば，求めるべき材料定数$\boldsymbol{K(t)}$，$\boldsymbol{G(t)}$が得られる．解析結果については当日報告する予定である。

謝辞

本研究は，独立行政法人日本学術振興会より「科学研究費補助金, 基盤研究（C）, 課題番号:22560062」の助成を得た．記して謝意を表します．

参考文献

1) T. Doi, S.Hayano and S.Saito:Wavelet solution of the inverse source problems.IEEE Transactions on Magentics. 33 No.2, 1935-1938, 1997.
2) Flugge,W.：粘弾性学，(堀幸夫訳)，培風館，1973.
3) Schapery, R.A. : Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis, Proc. of 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1075-1085, 1962.