

軌道に生ずる波動の伝播速度に関する一考察

東海旅客鉄道株式会社 正会員 川崎 祐征

1. はじめに

非常に柔らかいばね係数を持った軌道の上を列車が高速で走行するとき、列車の速度と軌道の変形の伝播速度との関係が問題となる。これについては古くから臨界速度 (critical speed) に関する以下の公式が知られている。

$$v_{cr}^2 = \frac{2}{m} \sqrt{kEI} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ただし、

v_{cr} : 臨界速度

m : 単位長あたりのレール 質量

k : 単位長あたりのレール 支持ばね係数

EI : レール曲げ剛性

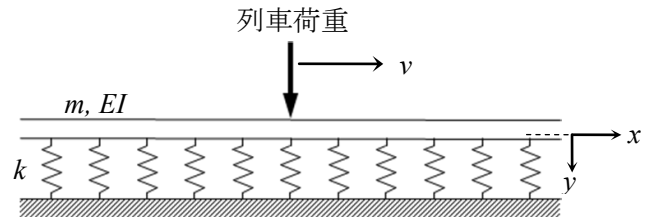


図1 連続弾性支持の梁モデル

臨界速度が発現する理由としては、図1に示すような連続弾性支持の梁モデルにおいて、列車荷重の移動によって生じた梁を伝わる波動の中で最も速度の遅い進行波に列車荷重が“追いついた”とき、ちょうど単振動において外部からその固有振動数に等しい周期で強制加振するとき発生する共振現象と同様なことが起こる、と説明される¹⁾。つまり、式(1)で求められる臨界速度は図1のモデルにおいて梁に生ずる進行波の位相速度の最小値に等しいと言える。しかし、式(1)で求められる臨界速度は軌道を単層としてモデル化した場合であり、実際の軌道はレール以外にもまくらぎや軌道スラブなどによって複層で構成されていることを考慮すると、軌道を複層としてモデル化した場合に軌道に生ずる波動の伝播速度を求めることは、臨界速度が発現する理由を考える上で重要であると思われる。

そこで本稿では、軌道を2層としてモデル化した場合における軌道上の波動の伝播速度に関する理論式および計算結果を紹介するとともに、臨界速度が出現する理由についての考察を述べる。

2. 2層モデルにおける波動の伝播速度に関する理論式

(1) 2層弾性支持モデルの理論式

図2に示すように軌道をレールおよび軌道スラブの2層としてモデル化した場合、各層の単位長あたり質量、単位長あたり支持ばね係数および曲げ剛性をそれぞれ m_i , k_i , EI_i とすると、軌道を角振動数 ω で定点加振した場合に軌道に生ずる進行波の位相速度 c_p は以下の式で求めることができる²⁾。

$$c_p = \frac{\omega}{\gamma} \quad \dots \dots \dots (2)$$

ただし、

$$\gamma^4 = \frac{-\{q_1\omega_{12}^2 + q_2\omega_1^2 - (q_1 + q_2)\omega^2\}}{2q_1q_2} \pm \frac{\sqrt{\{q_1\omega_{12}^2 + q_2\omega_1^2 - (q_1 + q_2)\omega^2\}^2 - 4q_1q_2\{\omega^4 - (\omega_{12}^2 + \omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2\}}}{2q_1q_2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$q_1 = \frac{EI_1}{m_1}, \quad q_2 = \frac{EI_2}{m_2}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_{12}^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \omega_{21}^2 = \frac{k_1}{m_2}$$

(2) EI_2 をゼロとした場合の理論式

軌道をレールとまくらぎの2層としてモデル化する場合、図2に示す EI_2 をゼロと考えればよい。よって、この場合の進行波の位相速度 c_p を求めるときは、式(2)中の γ は以下の式となる。

$$\gamma = 4 \sqrt{\frac{1}{EI_1} \left\{ m_1 \omega^2 - \frac{k_1 (k_2 - m_2 \omega^2)}{k_1 + k_2 - m_2 \omega^2} \right\}} \quad \dots (4)$$

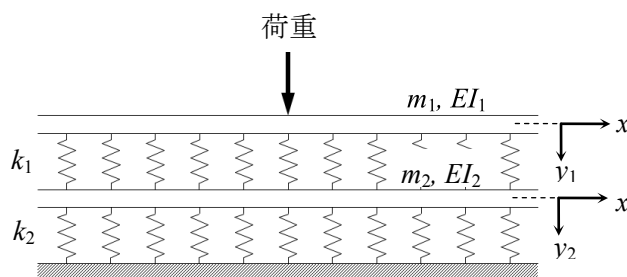


図2 2層弾性支持の梁モデル

表1 計算条件

項目		記号	単位	数値
第1層	単位長あたり質量	m_1	kg/m	60
	単位長あたりばね係数	k_1	N/m ²	9.8×10^7
	曲げ剛性	EI_1	N・m ²	6.4×10^6
第2層	単位長あたり質量	m_2	kg/m	60
	単位長あたりばね係数	k_2	N/m ²	9.8×10^7
	曲げ剛性	EI_2	N・m ²	6.4×10^6 または 0

3. 計算結果および考察

表1の計算条件により求めた定点加振時に軌道に生ずる進行波の位相速度および群速度（エネルギーの伝播速度）を図3および図4に示す。なお、群速度は $\Delta\omega/\Delta\gamma$ により近似して求めた。

図3をみると、2層弾性支持モデルでは114.9～279.0Hzの間の周波数域では1種類の進行波が発生しているが、279.0Hz以上の周波数域では2種類の進行波が発生していることがわかる。また、2種類の進行波の位相速度および群速度

の関係についてみると、それぞれの位相速度の最小値で位相速度と群速度が一致することがわかる。一方、図4に示す EI_2 をゼロとした場合では、進行波は114.9～222.8Hz および 279.0Hz 以上の周波数域で発生しており、222.8Hz 付近では進行波の位相速度がゼロに近づくことがわかる。また、114.9～222.8Hz の周波数域では進行波は群速度と一致することはなく、279.0Hz 以上の周波数域では位相速度の最小値で位相速度と群速度が一致することがわかる。

ここで、臨界速度は進行波の位相速度の最小値に等しいとの考え方が正しいとすると、 EI_2 をゼロとした場合では臨界速度はゼロとなってしまう、臨界速度そのものが存在しないことになる。ここで、進行波の位相速度の最小値で位相速度と群速度が一致することを踏まえて「臨界速度は位相速度と群速度が一致する速度に等しい」と考えると、 EI_2 をゼロとした場合における臨界速度の矛盾が解消されることになる。ただし、この考えはまだ仮説の段階であるので、この考え方の妥当性については今後も引き続き検討していきたい。

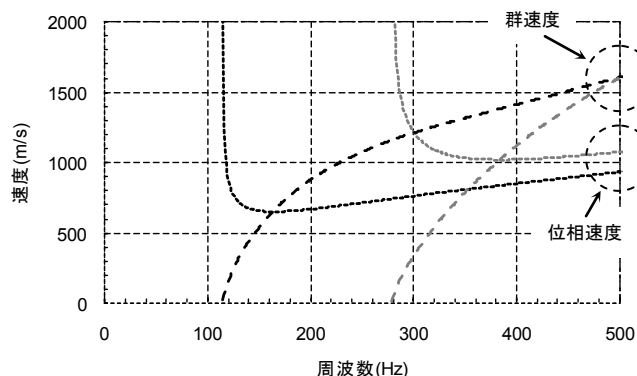


図3 2層弾性支持モデルの波動伝播速度

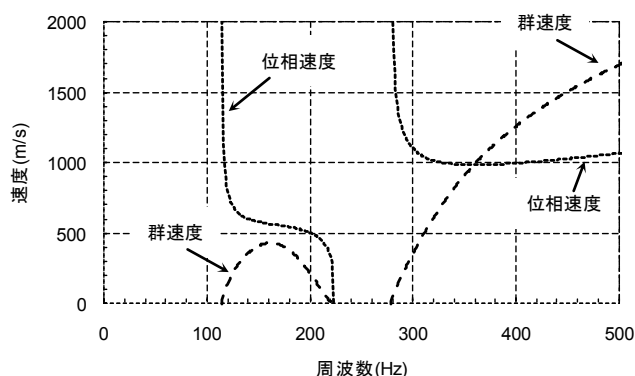


図4 EI_2 をゼロとした場合の波動伝播速度

- 参考文献 1) 吉村彰芳：数理解析の適用例：軌道の動的変形と列車の臨界速度，鉄道総研報告 第8巻第9号，1994年9月
2) 眞鍋克士：鉄道における波動と振動，交通新聞社，2002年9月，pp.126-129