

時間領域境界要素法による 多群中性子拡散問題の解析における境界形状の影響

福井大学大学院 学生会員 ○ 山口 潤
福井大学大学院 正 会 員 福井 卓雄

1 時間領域境界要素法

1.1 多群中性子拡散問題

N 群中性子拡散方程式について考える。 i 群の中性子束を ϕ_i とするとき、 i 群の群拡散方程式は

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - A_{ij} + B_{ij})\phi_j + s_i = C_{ij}\frac{\partial\phi_j}{\partial t} \quad (1)$$

のように表わされる [1]。ここに、 ϕ_i は群中性子束であり、群 $i = 1, \dots, N$ は中性子のエネルギーの大きい方から順に番号付けされている。以下では、添字については総和規約を適用するものとする。 s_i は中性子源の i 群への寄与分である。 A_{ij} は群から j 群への中性子の減少を表す対角行列であり、 i 群の巨視的吸収断面積 Σ_{ai} 、 i 群から j 群への巨視的群遷移断面積 $\Sigma_{i \rightarrow j}$ および群拡散係数 D_i により与えられる。 B_{ij} は群間の相互作用に関する係数で、巨視的群遷移断面積 $\Sigma_{j \rightarrow i}$ 、 i 群の群平均巨視的核分裂断面積 Σ_{fi} 、 i 群にエネルギーを持って発生する核分裂中性子の平均個数 χ_i および群拡散係数 D_i により与えられる。 C_{ij} は群中性子の拡散を表す対角行列であり、群拡散係数 D_i および i 群の中性子の速度 v_i で与えられる [2]。

1.2 境界積分方程式

N 元連立偏微分方程式 (1) の初期値境界値問題の解 ϕ_i は、一般化 Green 公式

$$\begin{aligned} C(x)\phi_i(x, t) = & \int_B G_{ij}(x, y, \cdot) * s_j(y, t) dV_y + C_{jk} \int_B G_{ij}(x, y, t)\phi_k(y, 0) dV_y \\ & + \int_{\partial B} G_{ij}(x, y, \cdot) * \frac{\partial\phi_j(y, t)}{\partial n} dS_y - \int_{\partial B} S_{ij}(x, y, \cdot) * \phi_j(y, t) dS_y \end{aligned} \quad (2)$$

により表すことができる。ここに、 $f * g(t)$ は時間に関する繰り込み積である。 x が領域内部にあるとき 1、滑らかな境界上にあるとき 1/2、境界外部にあるとき 0 の値をとる。また、 $S_{ij}(x, y, t)$ は二重層核である。

1.3 演算子積分法による時間域の離散化

Lubich による演算子積分法 [3] に基づいて方程式 (2) の時間に関する繰り込み積を離散化すると、

$$\begin{aligned} C(x)\phi_i(x, n\Delta t) \simeq & \sum_{k=0}^{n-1} \int_B G_{ij}^\omega(x, y, (n-k)\Delta t) s_j(y, k\Delta t) dV_y + C_{jk} \int_B G_{ij}(x, y, n\Delta t)\phi_k(y, 0) dV_y \\ & + \sum_{k=1}^n \int_{\partial B} G_{ij}^\omega(x, y, (n-k)\Delta t) \frac{\partial\phi_j(y, k\Delta t)}{\partial n} dS_y - \sum_{k=1}^n \int_{\partial B} S_{ij}^\omega(x, y, (n-k)\Delta t) \phi_j(y, k\Delta t) dS_y \end{aligned} \quad (3)$$

となる。(3) の $G_{ij}^\omega(x, y, m\Delta t)$ および $S_{ij}^\omega(x, y, m\Delta t)$ を Lubich の演算子積分法の重みとして表現すると、

$$G_{ij}^\omega(x, y, m\Delta t) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{G}_{ij}\left(x, y, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i(ml/L)} \quad (4)$$

$$S_{ij}^\omega(x, y, m\Delta t) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}_{ij}\left(x, y, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i(ml/L)} \quad (5)$$

となる。ここに、 $\hat{G}_{ij}$ および $\hat{S}_{ij}$ は基本解および二重層核の Laplace 変換である。変換パラメータは $p = \delta(\zeta_l)/\Delta t$ であるが、 $\delta(\zeta_l) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は離散表現を誘導するとき用いた線形多段階法における生成多項式の商であり、2 次の前進差分の場合には $\delta(\zeta) = (1 - \zeta) + (1 - \zeta)^2/2$ である。複素数 ζ_l は半径 $\rho < 1$ の円周上の点で、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i(l/L)}$ である。 ρ は要求される精度により決定される。

2 数値解析

境界形状による影響をみるため、図-1, 図-2, 図-3 の実線で示す領域で数値解析を行った。ここでは、境界条件を、一

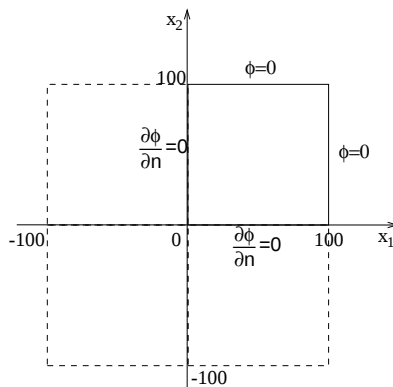


図-1 正方形領域

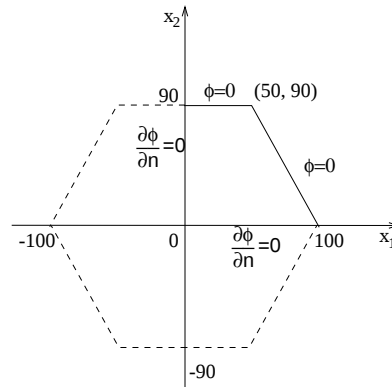


図-2 正六角形領域

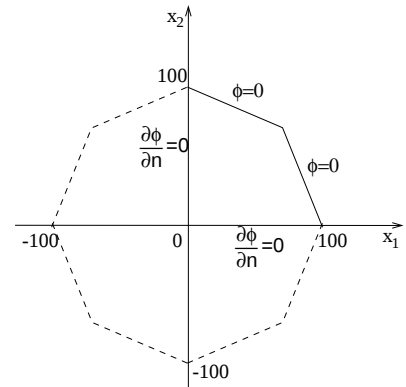


図-3 正八角形領域

対の隣り合う 2 辺がすべての群において $\partial\phi/\partial n = 0$ 、他の辺で $\phi = 0$ として、対称軸が x_1, x_2 -軸と一致するような解析領域とし、各領域の 4 分の 1 の領域を模擬している。

解析は 4 群拡散問題として行った。中性子源として $s_1 = 1.40 \times 10^6 \text{ n}/(\text{cm}^2 \cdot \text{sec})$ を全領域で与えている。初期値はすべての群において $\phi_i = 0$ である。境界の各辺は 10 分割して要素とし、全部で 40 要素とした。単位時間は、拡散に関する係数 $C_i/10$ の最小値によって決定し、 $T = 2.72765 \times 10^{-10} \text{ sec}$ としている。時間増分は $\Delta t = T$ とした。解析期間は $(0, 512T]$ である。解析に用いた定数は、高速炉炉心の核定数を用いた。

図-4、図-5、図-6 に、各領域での 1 群中性子束の与えられた時刻における対称軸上の分布を示す。

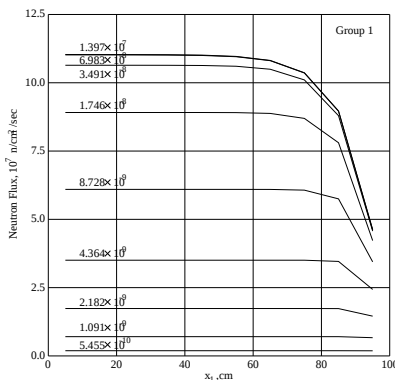


図-4 正方形領域の 1 群中性子束の分布形状

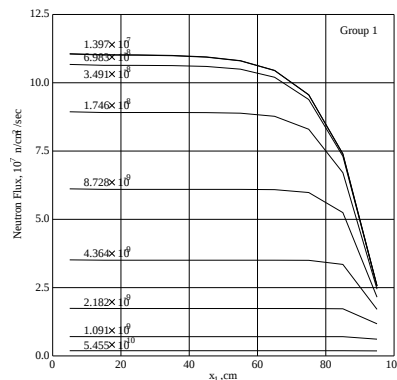


図-5 正六角形領域の 1 群中性子束の分布形状

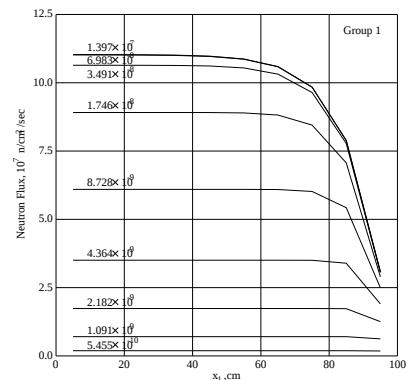


図-6 正八角形領域の 1 群中性子束の分布形状

対称軸上の分布は中心から約 60% 程度の領域ではほぼ一定であり、境界付近で急激に値が下がっているのがわかる。どの領域においても安定に中性子束の時間変化が追跡されており、また、分布形状にも違いがみられた。他の群中性子束についても同様の結果が得られ、問題なく解析を行うことができることが確認できた。

参考文献

- [1] Lamarsh, J.R. and A.J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering*, 3rd ed., Pearson Education Inc., 2001.
- [2] 山口潤, 福井卓雄: 多群中性子拡散方程式の時間領域境界要素法, 応用力学論文集, 13, pp.203-210, 2010.
- [3] Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, 52, pp. 129-145, pp. 413-425, 1988.