

Wavelet 変換の粘弾性体同定解析への適用

信州大学工学部

○松浦真也

信州大学工学部

正会員

大上俊之

信州大学工学部

正会員

小山 茂

1. はじめに

線形システムに対してウェーブレット変換を行うと、ウェーブレットスペクトラム上のマザーウェーブレットにデータの特徴が集約されるという性質がある。この性質を利用することにより、長方形行列の近似逆行列を求めることが可能である¹⁾。

本研究では粘弾性材料を対象に観測値から逆に材料定数を推定するパラメータ同定解析にウェーブレット変換を適用することを試みる。粘弾性解析には各変形段階において基礎方程式が区分的に線形となる増分理論を用いる。

2. 粘弾性体パラメータ同定解析²⁾

増分形のつりあい方程式および境界条件は次のようになる。

(つりあい方程式)

$$\nabla \cdot \Delta \sigma = 0 \quad \text{領域} \partial \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

(境界条件)

$$\Delta u = \Delta \hat{u} \quad \text{境界} \partial \Omega_u \text{ 上} \quad (2)$$

$$\Delta t = (\Delta \sigma) n = \Delta \hat{t} \quad \text{境界} \partial \Omega_t \text{ 上} \quad (3)$$

ここに、 Δ は微小時間 $(t, t+\Delta t)$ の増分を意味し、境界 $\partial \Omega = \partial \Omega_t + \partial \Omega_u$ 、 n は境界上の外向き単位法線ベクトルである。

これらに仮想仕事の原理を適用することによって、増分形で表わされた有限要素法の剛性方程式が次式のように得られる。

$$K(P) \Delta U = \Delta F + \Delta F_v \quad (4)$$

ここに、

$$K(P) = \int_{\Omega} B^T D(P) B dv \quad (5)$$

$$\Delta F = \int_{\partial \Omega_t} N^T \Delta \hat{t} dS \quad (6)$$

$$\Delta F_v = \int_{\Omega} B^T \Delta \sigma_v dv \quad (7)$$

である。 N および B は形状関数マトリクス、変位ひずみ関係マトリクスであり、 ΔF_v は粘弾性変形による節点荷重ベクトルを表わしている。 P は同定する粘弾性パラメータからなるベクトルである。

一方、パラメータ同定問題では、微小時間 $(t, t+\Delta t)$ において境界 Ω_t 上で変位 $\Delta \bar{u}$ 、境界 $\partial \Omega_u$ 上で荷重 $\Delta \bar{t}$ を測定することによって材料パラメータが推定できることになる。

(観測境界条件)

$$\Delta u = \Delta \bar{u} \quad \text{境界} \partial \Omega_t \text{ 上} \quad (8)$$

$$\Delta \sigma n = \Delta \bar{t} \quad \text{境界} \partial \Omega_u \text{ 上} \quad (9)$$

観測境界条件は次のように離散化される。

$$S_u \Delta U = \Delta \bar{U} \quad (10)$$

$$S_t \Delta F = \Delta \bar{F} \quad (11)$$

ここに、 $\Delta \bar{F}$ 、 $\Delta \bar{U}$ は該当する節点の荷重および変位の測定データであり、 S_t と S_u はそれぞれ対応する節点荷重、節点変位ベクトルをセレクトするマトリクスである。未知ベクトル P を決定するために式(4)、(10)、(11)に対して、Newton法を適用することにより k 回目の繰り返し計算ステップに対して、逆解析のシステム方程式が

$$G dx = R \quad (12)$$

$$G = \begin{bmatrix} K(P^k) - \left(\frac{\partial \Delta F_v}{\partial \Delta U}\right)^k & -I & \left(\frac{\partial K}{\partial P} \Delta U\right)^k - \left(\frac{\partial \Delta F_v}{\partial P}\right)^k \\ S_u & 0 & 0 \\ 0 & S_t & 0 \end{bmatrix}$$

$$dx = \begin{bmatrix} d(\Delta U)^k \\ d(\Delta F)^k \\ dP^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U^{k+1} - \Delta U^k \\ \Delta F^{k+1} - \Delta F^k \\ P^{k+1} - P^k \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \Delta F + \Delta F_v - K(P^k)\Delta U^k \\ \Delta \bar{U} - S_u(\Delta U)^k \\ \Delta \bar{F} - S_t(\Delta F)^k \end{bmatrix}$$

と得られる。

3. Wavelet 変換による近似逆行列の導出

n 行 n 列の正方マトリックス A に対するウェーブレット変換は、基底関数の線形変換によって得られるウェーブレット変換マトリックス W を用いて次のように与えられる。

$$A' = W \cdot A \cdot W^T \quad (13)$$

ここに、 A' はウェーブレットスペクトラムである。一般にウェーブレットスペクトラムは1行1列の近傍に絶対値の大きい値が分布する。これは、元のマトリックスの持つ情報がウェーブレット変換によって1行1列近傍に集約されていることを表している。得られたウェーブレットスペクトラムに逆ウェーブレット変換を行うことによって以下のように元のマトリックス A が得られる。

$$A = W \cdot A' \cdot W^T \quad (14)$$

今、大きさ n 行 m 列の長方形行列 C について考えると、ウェーブレット変換のデータ圧縮を利用し、長方形行列 C の近似逆行列 C_{app}^{-1} (m 行 n 列) が次の手順で得られる。

1. ウェーブレット変換をするために、 C (n 行 m 列)に大きさ ℓ 行 ℓ 列のゼロマトリックスを重ね合わせ C_{+zero} (ℓ 行 ℓ 列) を求める。ここに、 ℓ は2のべき乗の数である。
2. C_{+zero} (ℓ 行 ℓ 列) をウェーブレット変換し、ウェーブレットスペクトラム C' (ℓ 行 ℓ 列) を得る。
3. ウェーブレットスペクトラム C' に対して任意の大きさにスペクトラム C'_{cut} (正方行列) を切り出す。
4. C'_{cut} に対して逆行列 C'^{-1}_{cut} を求める。
5. C'^{-1}_{cut} に ℓ 行 ℓ 列のゼロマトリックスを重ね合わせ、 $C'^{-1}_{cut+zero}$ (ℓ 行 ℓ 列) を得る。
6. スペクトラム $C'^{-1}_{cut+zero}$ に対して逆ウェーブレット変換し、 $C^{-1}_{cut+zero}$ (ℓ 行 ℓ 列) を求める。
7. $C^{-1}_{cut+zero}$ から m 行 n 列のマトリックスを切り出し

て、 C の近似逆行列 C_{app}^{-1} (m 行 n 列) を得る。

図1に上記の手順で得た近似逆行列のチェックを示す。図1(a)に示す28行29列の行列 G に左側および右側から近似逆行列をかけてそれぞれ単位行列が得られるかを示したものである。

システムマトリックス G に対してウェーブレット変換を適用し、粘弾性体の材料定数を同定する。解析結果については当日報告する予定である。

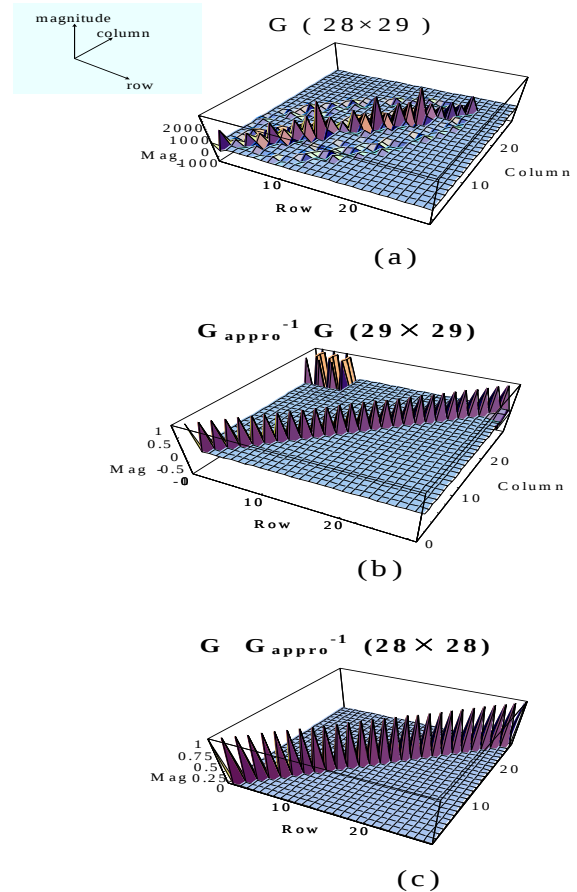


図1 近似逆行列のチェック

謝辞

本研究は、独立行政法人日本学術振興会より「科学研究費補助金、基盤研究(C)、課題番号：22560062」の助成を得た。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) T. Doi, S. Hayano and S. Saito. Wavelet solution of the inverse source problems. IEEE Transactions on Magentics. 33 No.2, 1935-1938, 1997.
- 2) T. Ohkami, G. Swoboda. Parameter identification of viscoelastic materials. Computers and Geotechnic, 24(4), 279-295, 1999.