シミュレーティッド・アニーリング及びペナルティ関数を用いた均衡制約付最適化問題の一解法：現実道路ネットワークへの適用例

金沢大学大学院　自然科学研究科　学生員　○　穴口　智也
金沢大学　理工研究域環境デザイン学系　正会員　中山晶一朗
金沢大学　理工研究域環境デザイン学系　フェロー　高山　純一

1.　はじめに

交通ネットワークの計画・分析の際, 研究・実用上, 交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．交通ネットワーク均衡としては，従来からワードロップ均衡や確率的利用者均衡が広く知られており，そのうち，確率的利用者均衡(これを本研究では「ロジット型利用者均衡」と呼ぶ)はランダム効用理論に基づいた経路選択を用いた交通ネットワーク均衡である．

ロジットモデルの経路効用関数は最も簡単な場合でも $-\theta t+\varepsilon$ であり，パラメータ θ を推定する必要がある．ここで，t は経路の旅行時間，ε は確率項である．ロジット型利用者均衡では，このパラメータにどのような値を用いるべきかが問題となることが少なくない．また，$-\theta t+\varepsilon$ よりも複雑な効用関数を定義することも可能で, その際は更にパラメータ推定が重要になる．

ロジットモデル等を含む最適化問題を解く際に，上記のように複雑なパラメータを持つために極値が複数あるような目的関数の場合，通常用いられる最適化手法では局所解に陥ってしまい，的確に最適解を求めることが困難となる可能性がある．そこで本研究では，最適化計算に筆者ら[1)]が開発した，シミュレーティッド・アニーリング(Simulated Annealing, SA)を応用した最適化手法を用いる．そして，中山，高山[2)]が提案した，ロジット型利用者均衡モデルの交通量配分における最尤推定法によるパラメータ推定について，ペナルティ関数を用いた同時計算法の提案を行うとともに，現実道路ネットワークへ適用した場合における推定精度，計算時間の短縮等について考察する．

2.　ロジット型確率ネットワーク均衡の定式化

(1)　ロジット型確率ネットワーク均衡

中山，高山[2)]の研究では，OD 交通量はポアソン分布に従い, 経路選択は確率的に行われると仮定しており，この場合, 経路交通量 m_{ij} は独立なポアソン分布に従う．経路交通量が十分に大きい場合，ポアソン分布の平均と分散はともに m_{ij} であるため, 中心極限定理により平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 $\mathrm{N}[m_{ij}, m_{ij}]$ に従うと近似することができる. このとき, リンク交通量 $\mathbf{x}$ は以下の多変量正規分布として与えることができる.

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{1}$$

ただし $\boldsymbol{\mu}$ は平均リンク交通量ベクトルでその要素は μ_a, $\mathbf{\Sigma}$ はリンク交通量の分散共分散行列，$\mathbf{\Sigma}^{-1}$ は $\mathbf{\Sigma}$ の逆行列，$|\mathbf{\Sigma}|$ は $\mathbf{\Sigma}$ の行列式，$n(=|A|)$ はリンクの総数である．

また，本研究では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択確率を仮定する．各道路利用者は次式のロジットモデルに従い，経路選択確率 $\mathbf{p}_i$ を決定していると仮定する．

$$p_{ij}=\frac{\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij})}{\sum_{j=1}^{J_i}\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij})} \tag{2}$$

ここで $\bar{c}_{ij}$ は OD ペア i の経路 j の平均旅行時間，θ は正のパラメータである．

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するにあたり，式(2)を含んだ関数

$$\mathbf{g}=(g_{11},\ldots,g_{21},\ldots)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

を考える．関数 $\mathbf{g}$ の要素 g_{ij} を以下のように定義する．

$$g_{ij}(\mathbf{m})=\lambda_i\frac{\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij}(\mathbf{m}))}{\sum_{j=1}^{J_i}\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij}(\mathbf{m}))} \tag{4}$$

確率ネットワーク均衡は関数（写像）$\mathbf{g}$ に関する以下の不動点問題として定式化できる．

$$\mathbf{m}=\mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{5}$$

(2)　最尤推定法

リンク交通量の実現値，つまりリンク交通量の観測値 $\mathbf{x}$ が与えられた場合，以下の対数尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})=\ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

これを用いて，以下に示すように，確率ネットワーク均衡が下位問題となった均衡制約付最適化問題として，最尤推定法を用いた $\boldsymbol{\theta}(=\theta_r\,(r=1,2,\cdots,R))$ を求める

パラメータ推定を定式化することができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} \quad L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{m}) \tag{7}$$

$$s.t. \quad \mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{8}$$

なお，ロジットモデルのパラメータを推定する場合，対数尤度関数に$\boldsymbol{\theta}$は陽には入っておらず，$L(\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x})$という表記の方が適しているとも言える．

3.　同時計算法の構築

前章で定式化されたMPECは，均衡制約条件（式(8)）を満たすような平均経路交通量ベクトル$\mathbf{m}$を収束計算によって算出した上で，目的関数式（式(7)）を最大化させるという計算手順を踏んでいるため，計算に非常に時間がかかってしまうという問題点もある．この問題点に対し，Connors，Smithら[3]は，先に均衡制約条件を満たす平均経路交通量ベクトル$\mathbf{m}$を算出するのではなく，均衡制約条件に新たなパラメータを掛け合わせ，ペナルティ関数として目的関数に組み込んだパラメータ推定の同時計算法を提案している．この場合，平均経路交通量ベクトル$\mathbf{m}$は計算初期において均衡制約条件を必ずしも満たしている必要はないため，計算時間の短縮を図ることができる．

前章で取り上げた交通ネットワーク均衡モデルを，上記の手法により無制約最適化問題として再定式化すると，以下のように表すことができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta},\eta} \quad L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{m}) - \eta\|\mathbf{m}-\mathbf{g}(\mathbf{m}|\boldsymbol{\theta})\| \tag{9}$$

ここでηは計算回数に応じて増加するパラメータ，$\|\cdot\|$はユークリッドノルムである．新たにパラメータηを導入したため，(9)式には$\boldsymbol{\theta}$とηの複数のパラメータが存在することになる．このような複数のパラメータに依る関数の最適化問題を解く際に，筆者ら[1]が開発したシミュレーティッド・アニーリングのような最適化手法が有効であると考えられる．

4.　金沢市道路ネットワークへの適用

本研究において構築したモデルを，現実道路ネットワークである金沢市道路ネットワークへ適用することを考える．適用するネットワークの詳細について，ノード数は140，リンク数は472，経路数は9934であり，ノードがセントロイドを兼ねることとする．対象となる道路ネットワーク図を**図-1**に示す．

以上に示した各種データを用いて，パラメータの推定，経路交通量の配分を同時計算法と二段階計算法の両手法で行った結果とその比較を**表-1**に示す．

図-1　金沢市道路ネットワーク図

表-1　金沢市道路ネットワークにおける計算結果比較

	同時計算法	二段階計算法
収束計算回数h	*144*	*215*
最適目的関数値L	*-16131.152*	*-16134.943*
最適パラメータθ	*0.211*	*0.218*
決定係数R^2	*0.751*	*0.737*
相関係数R	*0.867*	*0.859*
総計算時間(h)	*72.16*	*118.25*

表-1より，両手法により得られたパラメータや相関係数はほぼ変わらない結果となりながらも，同時計算法を用いた場合の方が収束計算回数，総計算時間ともに減少していることが分かり，同時計算法の有意性を確認することができた．

5.　まとめ

本研究では，ロジット型利用者均衡モデルの交通量配分におけるパラメータ推定の同時計算手法の提案を行い，その有意性を示した．交通量配分では計算にかかる時間が問題となることが少なくないため，今後は今回提案した手法のさらなる検討を進めていく．

参考文献

1) 穴口智也，中山晶一朗，高山純一：シミュレーティッド・アニーリング及び焼きなまし法を用いた均衡制約付最適化問題の一解法，土木計画学研究・論文集，Vol.26, pp.575-582, 2009.
2) 中山晶一朗，高山純一：リンク交通量を用いた交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定：リンク間相関を考慮した最尤法，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.548-557, 2006.
3) Connors,R., Smith,M.J. and Watling,D. : Bilevel Optimisation of Prices in Network Equilibrium Models, Mathematics in Transport, ELSEVIER LIMTED, pp.27-43, 2007.